

**QAZAQ JOURNAL OF YOUNG SCIENTIST****2026, Vol.4, No. 5 (May)**<https://qazaqjournal.kz/>

ӘОЖ 517. 518

**ОРТОГОНАЛЬ ҚАТАРДЫҢ АБСОЛЮТТІ РИСС  
ҚОСЫНДЫЛАНУЫ****Мақсұт Әлихан Аханұлы**2-курс магистранты, 7M05401-Математика, Еуразия Ұлттық Университеті,  
Астана қ., Қазақстан**Ғылыми жетекші:** Бітімхан Самат, қауымдастырылған профессор, PhD

*Бұл мақалада абсолютті Рисс қосындылануы ортогональ қатарлардың жинақталуын тереңірек сипаттайтын маңызды ұғымдардың бірі болып табылады. Бұл тәсіл қатарлардың орнықтылығын зерттеуде, олардың аналитикалық қасиеттерін анықтауда және әртүрлі функционалдық кеңістіктердегі мінез-құлқын талдауда ерекше рөл атқарады. Сонымен қатар аталған теория қазіргі таңда спектралдық анализ, дифференциалдық теңдеулер және қолданбалы математика салаларында кеңінен қолданылып келеді. Осы жұмыста ортогональ қатарлардың абсолютті Рисс қосындылануы ұғымының негізгі ерекшеліктері қарастырылып, оның теориялық маңызы мен қолданылу бағыттарына талдау жасалады.*

**Кілт сөздер:** дербес қосынды, абсолютті тұрақты, ортогональ қатар, монотонды функциялар.

**Кіріспе:** Ортогональ қатарларды зерттеу барысында олардың әрдайым классикалық мағынада жинақтала бермейтіні анықталған. Кейбір қатарлар үшін жинақталу өте баяу жүзеге асады немесе мүлде орындалмайды. Осындай жағдайларда қатарлардың қасиеттерін зерттеу үшін арнайы қосындылану әдістері пайдаланылады. Солардың бірі – Рисс қосындылануы әдісі. Бұл әдіс жинақталмайтын қатарларды жалпыланған түрде қарастыруға және олардың шектік мәндерін анықтауға мүмкіндік береді.

**Материалдар мен әдістер.**  $s_n \sum a_n$  қатардың  $n$ -ші дербес қосындысы болсын. Егер  $\{p_n\}$  оң тұрақтылар тізбегі және

$$P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n \rightarrow \infty, \text{ егер } n \rightarrow \infty, P_{-k} = p_{-k} = 0, k \geq 1 \text{ үшін}$$

болса, онда  $\sum a_n$  үшін  $\bar{t}_n$  Рисс ортасы келесі түрдегідей

$$\bar{t}_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_k s_k \quad (P_n \neq 0) \quad (2.2.1)$$

анықталады. Егер

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{t}_n - \bar{t}_{n-1}| \quad (2.2.2)$$

қатар жинақталатын болса, онда  $\sum a_n$  қатар  $(R, P_n, 1)$  қосындыланады немесе  $(\bar{N}, p_n)$  қосындыланады. Абсолютті логарифмдік қосындыланатындықтан  $p_n = 1/(n+1)$  жағдайында  $(R, P_n, 1)$  қосындыланады [23].

$r(x) \ x > 0, r(x) > 0, r(x) \uparrow \infty \ x \uparrow \infty$  интервалда анықталатын және  $r(x)$  үзіліссіз дифференциалданатын болсын. Бүтін  $n$  үшін  $r(n) = r_n$  деп жазамыз.  $\sum a_n$  қатары  $(R, r, 1)$  қосындыланады, егер  $B > 0$  үшін

$$\int_B^{\infty} \frac{r'(x)}{r^2(x)} dx \mid \sum_{n \leq x} r_n a_n < \infty$$

болса.

$(R, P_n, 1)$  әдісі  $(R, r, 1)$  әдісіне  $r_n = P_n$  болған жағдайда ғана тепе-тең екені белгілі.

$\{\varphi_n(x)\}$  ортогональ жүйесі  $(a, b)$  аралығында анықталсын.  $f(x) \in L^2(a, b)$  функциясы үшін

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$$

болатындай,  $L^2$  метрикасында  $E_n^{(2)}(f)$  бірінші жуықтауын көпмүшелік орталарын  $\varphi_0(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$  болатындай  $f(x)$  функциясына анықтаймыз.

$$E_n^{(2)}(f) = \left( \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2}$$

болатыны жақсы белгілі.  $P(x)$  бүтін  $n$  және  $P'(n) = p_n$  үшін  $P(n) = P_n$  болатындай қатаң өспелі функция болсын.  $P(x)$  кері функциясын  $\Lambda(x)$  деп белгілейміз және  $\nu_n = [\Lambda(2^n)]$  саламыз, мұнда  $[x]$   $x$ -тің интеграл бөлігін анықталады. Онда біз

$$C_n = \left\{ \sum_{k=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} |a_k|^2 \right\}^{1/2} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (2.2.3)$$

саламыз.

Келесі белгілеулер жүйесін қолданамыз

$$L_0(t) = 1, L_1(t) = \log t, L_p(t) = L_1(L_{p-1}(t)) = \log \dots \log t, \\ L_p^{(\varepsilon)}(t) = L_1(t) \dots L_{p-1}(t) (L_p(t))^{1+\varepsilon} \quad (\varepsilon \geq 0, p = 1, 2, \dots)$$

мұнда, егер тікелей жағдайда позитивті сандарды анықтамаса, онда біз оларды 1-лермен ауыстырамыз. Біз кез келген  $\{\lambda_n\}$  үшін  $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n-1}$  деп жазамыз. Барлық уақытта сондай болмайтын позитивті абсолютті тұрақтыларды анықтай аламыз.

**Теорема А.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$  ортогональ қатар  $(R, P_n, 1)$  қосындыланады сонда тек сонда ғана, егер

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \quad (2.2.4)$$

қатары жинақталса, мұнда  $C_n$  (3.2.3)-та анықталған.

Бұл теореманы дәлелдеу үшін төмендегі теореманы дәлелдейміз.

**Теорема 24.** (3.2.4) қатарының жинақтылығы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{k=1}^n P_{k-1}^2 |a_k|^2 \right\}^{1/2} \quad (2.2.5)$$

қатар жинақтылығына тепе-тең.

*Дәлелдеу.*  $m_0(n) \nu_{m_0(n)} < n \leq \nu_{m_0(n)+1}$  сияқты бүтін болсын. Демек біз

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{k=1}^n P_{k-1}^2 |a_k|^2 \right\}^{1/2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{m=0}^{m_0(n)-1} \sum_{k=v_m+1}^{v_{m+1}} P_{k-1}^2 |a_k|^2 \right\}^{1/2} \geq \\ & \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{m=0}^{m_0(n)-1} P_{v_m}^2 \sum_{k=v_m+1}^{v_{m+1}} P_{k-1}^2 |a_k|^2 \right\}^{1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{m=0}^{m_0(n)-1} P_{v_m}^2 C_m^2 \right\}^{1/2} \geq \\ & \geq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=v_{j+1}}^{v_{j+1}} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{m=0}^{m_0(n)-1} P_{v_m}^2 C_m^2 \right\}^{1/2} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=v_{j+1}}^{v_{j+1}} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{m=0}^{j-1} P_{v_m}^2 C_m^2 \right\}^{1/2} \geq \\ & \sum_{j=1}^{\infty} C_{j-1} P_{v_{j-1}} \sum_{n_j=v_{j+1}}^{v_{j+1}} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left( \frac{1}{P_{n-1}} - \frac{1}{P_n} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} C_{j-1} \left( \frac{P(v_{j-1})}{P(v_j)} - \frac{P(v_{j-1})}{P(v_{j+1})} \right) \geq \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{\infty} C_j \end{aligned}$$

және келесі мәнді аламыз

$$P(v_{j-1})/P(v_j) - P(v_{j-1})/P(v_{j+1}) \geq 2^{j-1}/2^j - 2^{j-1}/2^{j+1} = 1/2 - 1/4 = 1/4.$$

Ендігі де біз теорема А және 24-ті қолданып, қандай да бір жеткілікті шарттарды ортогональ қатарларды абсолютті Рисс қосындылау үшін беретін боламыз [24-27].

**Салдар 1.**  $s$  оң бүтін және  $p$  теріс емес бүтін болсын.

I. Егер  $\alpha > 0$  және кез келген  $\varepsilon > 0$  үшін

$$\sum |a_n|^2 L_s(n)^\alpha L_s^{(0)}(n)^{-1} L_{p+s}^{(\varepsilon)}(n) \tag{2.2.6}$$

қатар жинақталатын болса, онда  $\sum a_n \varphi_n(x)$  қатар барлық жерде  $|R, \exp L_s(n)^\alpha, 1|$  қосындыланады делік.

II. Егер  $\alpha > 0$  және кез келген  $\varepsilon > 0$  үшін

$$\sum |a_n|^2 L_p^{(\varepsilon)}(n) \tag{2.2.7}$$

қатар жинақталса, онда  $\sum a_n \varphi_n(x)$  қатар барлық жерде  $|R, n^\alpha, 1|$  қосындыланады делік.

III. Егер  $\alpha > 0$  және кез келген  $\varepsilon > 0$  үшін

$$\sum |a_n|^2 n^\alpha L_p^{(\varepsilon)}(n) \tag{2.2.8}$$

қатар жинақталса, онда  $\sum a_n \varphi_n(x)$  қатар барлық жерде  $|R, \exp n^\alpha, 1|$  қосындыланады дерлік.

IV. Егер  $\alpha > 0$  және кез келген  $\varepsilon > 0$  үшін

$$\sum |a_n|^2 L_s^{(0)}(n)^{-1} L_{p+s}^{(\varepsilon)}(n) \tag{2.2.9}$$

қатар жинақталса, онда  $\sum a_n \varphi_n(x)$  қатар барлық жерде  $|R, L_s(n)^\alpha, 1|$  қосындыланады дерлік.

V. Егер  $\alpha > 0$  және кез келген  $\varepsilon > 0$  үшін

$$\sum |a_n|^2 n L_s^{(0)}(n)^{-\alpha} L_{p+s}^{(\varepsilon)}(n) \tag{2.2.10}$$

қатар жинақталса, онда  $\sum a_n \varphi_n(x)$  қатар барлық жерде  $|R, \exp n / L_s(n)^\alpha, 1|$  қосындыланады дерлік.

*Дәлелдеу.* Нәтижелер ұқсас дәлелденгендіктен бұл жағдайда тек (I) жағдайын ғана дәлелдедік. Теорема 24 және А және Шварц теңсіздігінен біз

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{k=1}^n P_{k-1}^2 |a_k|^2 \right\}^{1/2} = \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2} L_{p+s}^{(\varepsilon)}(n)^{1/2}} \left\{ \frac{n L_{p+s}^{(\varepsilon)}(n) p_n^2}{P_n^2 P_{n-1}^2} \sum_{k=1}^n P_{k-1}^2 |a_k|^2 \right\}^{1/2} \leq \\ & \leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n L_{p+s}^{(\varepsilon)}(n)} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n L_{p+s}^{(\varepsilon)}(n) p_n^2}{P_n^2 P_{n-1}^2} \sum_{k=1}^n P_{k-1}^2 |a_k|^2 \right\}^{1/2} \leq \\ & \leq A \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 P_{k-1}^2 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n L_{p+s}^{(\varepsilon)}(n) p_n^2}{P_n^2 P_{n-1}^2} \right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

аламыз. Басқалай алғанда, егер біз  $P_n = \exp L_s(n)^\alpha$  деп ойласақ, онда

$$p_n \approx n^{-1} L_s(n)^\alpha L_s^{(0)}(n)^{-1} \exp L_s(n)^\alpha$$

екендігін көреміз. Сондықтан біз

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n L_{p+s}^{(\varepsilon)}(n) p_n^2}{P_n^2 P_{n-1}^2} & \leq A \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n L_{p+s}^{(\varepsilon)}(n)}{(\exp L_s(n)^\alpha)^4} \left\{ n^{-1} L_s(n)^\alpha L_s^{(0)}(n)^{-1} \exp L_s(n)^\alpha \right\}^2 \leq \\ & \leq A \frac{L_{p+s}^{(\varepsilon)}(k) L_s(k)^\alpha L_s^{(0)}(k)^{-1}}{\exp L_s(k)^\alpha} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n^{-1} L_s(n)^\alpha L_s^{(0)}(n)^{-1} \exp L_s(n)^\alpha}{(\exp L_s(n)^\alpha)^2} = \\ & = O \left( \frac{L_s(k)^\alpha L_s^{(0)}(k)^{-1} L_{p+s}^{(\varepsilon)}(k)}{(\exp L_s(k)^\alpha)^2} \right) \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

деп аламыз. (3.2.11) және (3.2.12) бойынша біз (I) жағдайын дәлелдейміз [25].

Демек, егер  $\{\Omega_n\}$  позитивті кішіреймейтін  $\Omega_0 = 0$  бар тізбек болса, онда ең жақсы жуықтауды қолдануда біз

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \Omega_n = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta \Omega_k \sum_{n=k}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \{E_k^{(2)}(f)\}^2 \Delta \Omega_k$$

екендігін көреміз, яғни (2.2.5)-(2.2.6) қатарлары үшін  $\Delta \Omega_k$  сәйкесінше бағалап, жеңіл келесі салдарды аламыз [28].

**Салдар 2.1**-салдардағы (2.2.5)-(2.2.6) қатарлар сәйкесінше (2.2.13)-(2.2.17) қатарларына ауыстырыла алады:

$$\sum n^{-1} L_s(n)^\alpha L_s^{(0)}(n)^{-2} L_{p+s}^{(\varepsilon)}(n) \{E_n^{(2)}(f)\}^2, \quad (2.2.13)$$

$$\sum n^{-1} L_1(n)^{-1} L_p^{(\varepsilon)}(n) \{E_n^{(2)}(f)\}^2, \quad (2.2.14)$$

$$\sum n^{\alpha-1} L_p^{(\varepsilon)}(n) L_{p+s}^{(\varepsilon)}(n) \{E_n^{(2)}(f)\}^2, \quad (2.2.15)$$

$$\sum n^{-1} L_{s+1}(n) L_{s+1}^{(0)}(n)^{-2} L_{s+p}^{(\varepsilon)}(n) \{E_n^{(2)}(f)\}^2, \quad (2.2.16)$$

$$\sum L_s(n)^{-\alpha} L_{p+s}^{(\varepsilon)}(n) \{E_n^{(2)}(f)\}^2 \quad (2.2.17)$$

Тригонометриялық жүйелер үшін біз ескертулер жасаймыз.

$$f(x) \in L^2(0, 2\pi)$$

және

$$f(x) \approx \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \quad (2.2.18)$$

болсын.

$\Omega(\delta, f)$  келесі интегралдардың біреуін білдіретін болсын:

$$\omega^2(\delta, f) = \sup_{0 \leq t \leq \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x-t)]^2 dx \right\}^{1/2},$$

$$\omega_2^{(2)}(\delta, f) = \sup_{0 \leq t \leq \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]^2 dx \right\}^{1/2},$$

$$\omega^2(\delta, f) = \left\{ \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left( \int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x-t)]^2 dx \right) dt \right\}^{1/2},$$

$$\omega_2^{(2)}(\delta, f) = \left\{ \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left( \int_0^{2\pi} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]^2 dx \right) dt \right\}^{1/2}.$$

**Теорема В.**  $0 < \beta \leq 2$  болсын.  $\lambda(x) (x \geq 1)$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\beta \lambda(x)} \leq A \frac{1}{n^{\beta-1} \lambda(n)}$$

теңсіздік орындалатындай оң монотонды функциялар болсын.

Онда

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 \lambda(1/t)} \left( \int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x-t)]^2 dx \right)^{\beta/2} dt < \infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2 \lambda(1/t)} \left( \int_0^{2\pi} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]^2 dx \right)^{\beta/2} dt < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} \Omega\left(\frac{1}{n}, f\right)^\beta < \infty$$

және

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n)} \{E_n^{(2)}(f)\}^\beta < \infty$$

шарттары өзара тепе-тең.

Теорема В және салдар 2-ден келесі салдар шығады [29].

**Салдар 3.**  $p$  және  $s$  салдар 1-дегі бүтін сандар болсын.

1. Егер  $\alpha > 0$  және кез келген  $\varepsilon > 0$  үшін

$$\Omega(\delta, f) = O\left(L_s(1/\delta)^{-\alpha/2} L_s^{(0)}(1/\delta) L_{p+s}^{(\varepsilon)}(1/\delta)^{-1}\right),$$

болса, онда  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$  Фурье қатары барлық жерде  $|R, \exp L_s(n)^\alpha, 1|$

қосындыланады дерлік.

2. Егер  $\alpha > 0$  және кез келген  $\varepsilon > 0$  үшін

$$\Omega(\delta, f) = O\left(L_1(1/\delta)^{1/2} L_p^{(\varepsilon)}(1/\delta)^{-1}\right)$$

болса, онда  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$  Фурье қатары барлық жерде дерлік  $|R, n^\alpha, 1|$  қосындыланады дерлік.

**3.** Егер  $0 < \alpha < 2$  және кез келген  $\varepsilon > 0$  үшін

$$\Omega(\delta, f) = O\left(\delta^{\alpha/2} L_p^{(\varepsilon)} (1/\delta)^{-1}\right)$$

болса, онда  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$  Фурье қатары барлық жерде  $|R, \exp n^\alpha, 1|$  қосындыланады дерлік.

**4.** Егер  $\alpha > 0$  және кез келген  $\varepsilon > 0$  үшін

$$\Omega(\delta, f) = O(L_{s+1} (1/\delta)^{-1/2-\varepsilon})$$

болса, онда  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$  Фурье қатары барлық жерде дерлік  $|R, L_s(n)^\alpha, 1|$  қосындыланады дерлік.

**5.** Егер  $\alpha > 0$  және кез келген  $\varepsilon > 0$  үшін

$$\Omega(\delta, f) = O\left(\delta^{1/2} L_s (1/\delta)^{\alpha/2} L_{p+s}^{(\varepsilon)} (1/\delta)^{-1}\right)$$

болса, онда  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$  Фурье қатары барлық жерде дерлік  $|R, \exp n / L_s(n)^\alpha, 1|$  қосындыланады

**Лемма 1.**  $\{p_n\}$  оң тізбек болсын. (2.2.12) қатары жинақталады, егер  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(x)$

Радемахер қатары  $(R, P_n, 1)$  қосындыланатындай нүктелер жиыны оң болса.

**Лемма 2.**  $\{p_n\}$  оң тізбек болсын.

$$A_k(x) = \sigma_k \cos(kx + \theta_k), \text{ мұнда } \sigma_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$$

болсын. Егер  $E$  оң өлшемді жиында

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{k=1}^n P_{k-1}^2 A_k^2(x) \right\}^{1/2} \tag{2.2.19}$$

қатары жинақталса, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{k=1}^n P_{k-1}^2 \sigma_k^2 \right\}^{1/2}$$

қатары жинақталады. Керісінше, (2.2.19) қатарының жинақталуы барлық  $x$  үшін (2.2.18) орындалатынын білдіреді.

*Дәлелдеу.* (2.2.18) гипотезасынан

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \int_{E_0} \left\{ \sum_{k=1}^n P_{k-1}^2 \sigma_k^2 \cos(kx + \theta_k) \right\}^{1/2} dx \leq Am(E_0) \tag{2.2.20}$$

мұнда  $m$  Лебег өлшемін анықтайды. Жоғарыдай болатын  $E_0 \subset E$  позитивті өлшемді жиын бар. Минковский теңсіздігін қолдану арқылы біз келесі теңсіздікті аламыз:

$$\begin{aligned} I &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{E_0} (P_{k-1}^2 \sigma_k^2 |\cos(kx + \theta_k)| dx)^2 \right\}^{1/2} \geq \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{k=1}^n P_{k-1}^2 \sigma_k^2 \left( \int_{E_0} |\cos(kx + \theta_k)| dx \right)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

Риман-Лебег теоремасынан жеткілікті үлкен  $k_0$ , яғни  $k \geq k_0$  үшін

$$\begin{aligned} \int_{E_0} |\cos(kx + \theta_k)| dx &\geq \int_{E_0} \cos^2(kx + \theta_k) dx = \frac{1}{2} \int_{E_0} (1 + \cos 2(kx + \theta_k)) dx = \\ &= \frac{1}{2} m(E_0) + \frac{1}{2} \int_{E_0} \cos 2(kx + \theta_k) dx \geq \frac{1}{4} m(E_0) \end{aligned}$$

аламыз. (3.2.20) және (3.2.21) теңсіздіктерінен

$$\begin{aligned} I &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{k=k_0}^n P_{k-1}^2 \sigma_k^2 \left( \frac{1}{4} m(E_0) \right)^2 \right\}^{1/2} \geq \\ &\geq A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{k=k_0}^n P_{k-1}^2 \sigma_k^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

шығады. Басқа жағдайлар үшін

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{k=k_0}^{k_0-1} P_{k-1}^2 \sigma_k^2 \right\}^{1/2} \leq A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} < \infty \tag{2.2.23}$$

бар.

**Қорытынды:** Қорытындылай келе, ортогональ қатарлардың абсолютті Рисс қосындылануы математикалық анализдегі маңызды зерттеу бағыттарының бірі болып табылады. Бұл әдіс классикалық мағынада жинақталмайтын

қатарлардың қасиеттерін зерттеуге және олардың жалпыланған қосындыларын анықтауға мүмкіндік береді. Абсолютті Рисс қосындылануы қатарлардың жинақталу шарттарын тереңірек түсіндіруге көмектеседі және олардың орнықтылығын сипаттауда маңызды рөл атқарады.

### Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

- 1 Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. – М.: Иностранная литература, 1963. – 145 с.
- 2 Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Физико-математическое литература, 1961. – 936 с.
- 3 Воробьев Н.Н. Теория рядов: Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов. – М.: Наука, 1973. – 213 с.
- 4 Зигмунд А. Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – Т.1. – 615 с.
- 5 Зигмунд А. Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – Т.2. – 537 с.
- 6 Зиза О.А. Суммирование ортогональных рядов. – М.: УРСС, 1999. – 281 с.

## АБСОЛЮТНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ РИССА ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

*Максут Алихан Аханулы*

*Абсолютная суммируемость Рисса является одним из важных понятий, позволяющих более глубоко исследовать свойства сходимости ортогональных рядов. Данный метод имеет особое значение при изучении устойчивости рядов, описании их аналитических свойств и исследовании поведения в различных функциональных пространствах. Кроме того, теория абсолютной суммируемости Рисса в настоящее время широко применяется в спектральном анализе, теории дифференциальных уравнений и прикладной математике. В данной работе рассматриваются основные свойства абсолютной суммируемости Рисса ортогональных рядов, а также проводится анализ её теоретических основ и областей применения.*

**Ключевые слова:** частичная сумма, абсолютная устойчивость, ортогональный ряд, монотонная функция, суммируемость Рисса.

**ABSOLUTE RIESZ SUMMABILITY OF ORTHOGONAL SERIES***Macsut Alikhan Ahanuly*

Absolute Riesz summability is one of the important concepts that allows a deeper investigation of the convergence properties of orthogonal series. This method plays a significant role in studying the stability of series, describing their analytical properties, and analyzing their behavior in various functional spaces. In addition, the theory of absolute Riesz summability is widely applied in spectral analysis, the theory of differential equations, and applied mathematics. This paper considers the main properties of the absolute Riesz summability of orthogonal series and analyzes its theoretical foundations and areas of application.

**Keywords:** partial sum, absolute stability, orthogonal series, monotone function, Riesz summability.

**REFERENCES**

- 1 Проблемы сходимости ортогональных рядов / Aleksich G. *Problems of Convergence of Orthogonal Series*. – Moscow: Foreign Literature Publishing House, 1963. – 145 p.
- 2 Тригонометрические ряды / Bari N.K. *Trigonometric Series*. – Moscow: Physics and Mathematics Literature Publishing House, 1961. – 936 p.
- 3 Теория рядов / Vorobyev N.N. *Theory of Series: Selected Chapters of Higher Mathematics for Engineers and Students*. – Moscow: Nauka, 1973. – 213 p.
- 4 Тригонометрические ряды Том 1 / Zygmund A. *Trigonometric Series*. Vol. 1. – Moscow: Mir, 1965. – 615 p.
- 5 Тригонометрические ряды Том 2 / Zygmund A. *Trigonometric Series*. Vol. 2. – Moscow: Mir, 1965. – 537 p.
- 6 Суммирование ортогональных рядов / Ziza O.A. *Summation of Orthogonal Series*. – Moscow: URSS, 1999. – 281 p.