ӘОЖ 517.984

БӨЛІКТІ-ТҰРАҚТЫ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ БАР ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЬ ЕСЕПТЕРІНДЕГІ ИЗОСПЕКТРЛІК КОНФИГУРАЦИЯЛАР МЕН КЕЛІСІМДІ ШЕШІМДЕР

Әбдікерім Қарлығa Кенжебекқызы

2 курс магистранты, Педагогикалық институт, ”Математика педагогтерін даярлау бағдарламасы”, Астана Халықаралық университеті, Астана қ., Қазақстан Республикасы

Ғылыми жетекші: Джумабаев С.А

Бұл жұмыста екінші ретті, коэффициенттері бөлікті-тұрақты болатын жалпыланған Штурм- Лиувилль есебі қарастырылады. Үзіліс нүктелеріндегі коэффициенттердің шешімдерін сәйкестендіру үшін біртұтас теоремалар алынды.Үзіліссіз потенциалды және үзіліссіз жетекші коэффициенті бар ерекше жағдайлардың салыстырмалы спектрлі талдауы жүргізілді. Қабаттардың орын ауыстыруы мен коэффициенттердің симметрияларынан туындайтын изоспектралды конфигурацияларға ерекше назар аударылды. Сандық мысалдар алынған теориялық қорытындыларды растайды.

Кілт сөздер: Штурма–Лиувилль есебі, бөлікті-тұрақты коэффициенттер, шектесу шарттары, изоспектральділік , монодромия матрицасы .

1. Кіріспе

Үздіксіз емес коэффициенттері бар Штурм–Лиувилль есептері қабатты және композитті орталарды, параметрлері біртекті емес кванттық жүйелерді модельдеуде, сондай-ақ механика мен акустика есептерінде туындайды. Қолданбалы және теориялық зерттеулерде бөлшекті-тұрақты коэффициенттер ерекше қызығушылық тудырады, өйткені олар қатаң аналитикалық талдауды дәл сандық зерттеумен ұштастыруға мүмкіндік береді. Аталған жұмыстың негізгі мақсаты — әмбебап келісу шарттарын тұжырымдау, салыстырмалы спектралдық талдау жүргізу және бірыңғай операторлық қойылым аясында изоспектрлі конфигурацияларды зерттеу.

2. Есептің берілуі

Спектралік тапсырманы қарастырамыз

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda y(x), x \in (a,b), \qquad (1)$$

Дирихле шарттарымен шектейміз

$$y(a) = 0, y(b) = 0. \qquad (2)$$

Коэффициенттер мынадай түрде берілген:

$p(x) = p_k > 0, q(x) = q_k, x \in (x_{k-1}, x_k),$

бұл жерде
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b.$

3. Әмбебап келісу теоремасы

1 теорема (келісу шарттары)

p, q функциялары бөлшекті-тұрақты және шектелген, ал $p(x)$>0 болсын. Онда y функциясы (1)–(2) есебінің меншікті шешімі болады, егер және тек қана егер:

1. $y \in C(a, b)$;
2. $p(x)y'(x) \in C(a, b)$;
3. әрбір (x_{k-1}, x_k) аралығында классикалық дифференциалдық теңдеу орындалады:

$-p_k y'' + q_k y = \lambda y.$

x_k үзіліс нүктелерінде мынадай шарттар орындалады:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x_k - 0) &= y(x_k + 0), \\ p_{k-1}y'(x_k - 0) &= p_k y'(x_k + 0). \end{aligned}} \qquad (3)$$

1 нәтижедегі (ерекше жағдайлар)

- $p \equiv 1$ болғанда: y пен y' үздіксіз болады;
- $q \equiv 0$ болғанда: y пен py' үздіксіз болады.

4. Матрицалық символдау мен спектр

Вектор жағдайында енгізіледі:

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ p(x)y'(x) \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Әрбір аралықта:

$\mathbf{Y}(x_k) = M_k(\lambda)\mathbf{Y}(x_{k-1}),$

$M_k(\lambda)$— матрицаға көшу.

Монодромияның толық матрицасы:

$$M(\lambda) = M_N(\lambda) \cdots M_1(\lambda). \qquad (5)$$

Спектр теңдеумен анықталады

$$(M(\lambda)(0,1)^T)_1 = 0. \qquad (6)$$

5. Сандық салыстырмалы мысал

$(0,\pi)$ аралығын $x=\pi/2$ нүктесіндегі үзіліспен қарастырамын.

5.1. Мүмкіндікке ие үзіліс

$$p\equiv 1, q(x)=\begin{cases}0, & x<\pi/2,\\ 4, & x>\pi/2.\end{cases}$$

Сандық меншікті мәндер:

$\lambda_1\approx 1{,}31, \lambda_2\approx 5{,}72, \lambda_3\approx 10{,}93.$

5.2. Геометриялық үзіліс

$$q\equiv 0, p(x)=\begin{cases}1, & x<\pi/2,\\ 4, & x>\pi/2.\end{cases}$$

Сандық меншікті мәндер:

$\lambda_1\approx 1{,}94, \lambda_2\approx 7{,}76, \lambda_3\approx 17{,}30.$

6. Изоспектрлі конфигурациялар

6.1. $q\equiv 0$ болғанда,қабаттардың орын ауыстыруы

Екі қабатты карастырамыз:

$(p_1,\ell_1),(p_2,\ell_2),\ell_1+\ell_2=b-a.$

Дәлелдеу:

Конфигурациялары бар тапсырмалар

$(p_1,\ell_1)\ (p_2,\ell_2)$и$(p_2,\ell_2)\ (p_1,\ell_1)$

Дирихле шарттарында изоспектрлі.

Негіздеме

Көшу матрицалары коммутативті (орын ауыстыруға болатын,бірақ нәтижесі өзгермейтін әдіс):

$M_1(\lambda)M_2(\lambda)=M_2(\lambda)M_1(\lambda),$

себебі олар тек $\ell_k/\sqrt{p_k}$ көбейтінділеріне ғана тәуелді.

6.2. Симметриялық потенциалдары

$-y''+q(x)y$ операторы үшін,

Изоспектрлік айна-симметриялық конфигурацияларда пайда болады:

$q(x)=q(b-x).$

$\mathrm{P}(x)$жағдайынан бөлек,симметриялы емес қабаттардың орын ауыстыруы спектрді бұзады.

6.3. Негізгі айырмашылық

Коэффициенттің түрлері	Изоспектрлі орын ауыстырулар
p(x)	мүмкін
q(x)	Тек қана симметриялы жағдайда

7. Талқылама

Потенциалды үзілістер энергетикалық тосқауылдар мен меншікті функциялардың локализациясын қалыптастырады. Алдыңғы коэффициенттің үзілістері есептің метрографиясын өзгертеді және шешімдерді баспай, градиентті қайта таратады.

8. Қорытынды

р(х) үшін изоспектральдылық оператордың геометриялық табиғатын көрсетеді және потенциалдар үшін жалпы жағдайда жоқ болады.

Зерттеу жұмысында мынадай қорытындыларға қол жеткізілді:

1. Зерттеу барысында универсалды сәйкестендіру шарттарының негізгі белгісі ретінде y функция және оның туындысы py'- тің үздіксіздігі алынды. Бұл шарттар операторлық теңдеулер мен шекаралық есептерді шешуде маңызды рөл атқарады;
2. р және q функцияларында үзілістері бар шекаралық есептердің спектрлік қасиеттері принципті түрде ерекшеленеді;
3. Матрицалық әдіс зерттеуді жүргізуге қатаң әрі біртұтас аналитикалық негізді қамтамасыз етеді.

Зерттеу барысында алынған нәтижелер тікелей және кері спектрлік есептерді шешуде, сонымен қатар аппроксимациялық әдістер мен схемаларды әзірлеуде қолдануға мүмкіндік береді.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1.Александр Иванович Шестаков (2003). Бөлінген коэффициенттері бар Штурм–Лиувилль операторлары үшін кері спектрлік есеп. Сібір математикалық журналы (Siberian Mathematical Journal), 44(5), 1142–1162.

2.Айнур Чөл (2015). Шекаралық шарттарда спектрлік параметрдің кубтық көпмүшелері және үзілісті коэффициенті бар Штурм–Лиувилль операторы үшін кері спектрлік есеп. Айырымдық теңдеулердегі жетістіктер (Advances in Difference Equations), 2015(132), 1–16. DOI: 10.1186/s13662-015-0478-7

3.Ханлар Р. Мамедов (2010). Шекаралық шартта спектрлік параметрі бар үзілісті Штурм–Лиувилль теңдеуі үшін кері шашырау есебі. Шеттік есептер (Boundary Value Problems), 2010, 171967-бап. DOI: 10.1155/2010/171967

4.Өзге Акчай (2021). Оң жарты осьте үзіліс шарттары бар Штурм–Лиувилль операторы үшін кері шашырау есебі. Таза және қолданбалы ғылымдар халықаралық журналы (International Journal of Pure and Applied Sciences), 7(3), 401–409.

5.Чуань-Фу Ян & Наталия Петровна Бондаренко (2019). Үзілісі бар Штурм–Лиувилль операторлары үшін кері есептердің локальді шешімділігі мен тұрақтылығы. arXiv preprint, arXiv:1906.06552.

6.Владимир Александрович Марченко (2011). Штурм–Лиувилль операторлары және олардың қолданылуы (Sturm–Liouville Operators and Their Applications). AMS Chelsea Publishing.

7.Борис Моисеевич Левитан (1987). Кері Штурм–Лиувилль есептері (Inverse Sturm–Liouville Problems). VNU Science Press.

8.Борис Моисеевич Левитан & Илья Самсонович Саргсян (1991). Штурм–Лиувилль және Дирак операторлары (Sturm–Liouville and Dirac Operators). Springer.

9.Герхард Фрайлинг & Владимир Александрович Юрко (2001). Кері Штурм–Лиувилль есептері және олардың қолданылуы (Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications). Nova Science Publishers.

10.Владислав Владимирович Кравченко (2020). Тікелей және кері Штурм–Лиувилль есептері: шешу әдісі (Direct and Inverse Sturm–Liouville Problems: A Method of Solution). Birkhäuser.

Изоспектральные конфигурации и согласованные решения в задачах Штурма–Лиувилля с кусочно-постоянными коэффициентами

Әбдікерім Қарлығa Кенжебекқызы

В данной работе рассматривается обобщённая задача Штурма–Лиувилля второго порядка с кусочно-постоянными коэффициентами. Получены единые теоремы согласования решений в точках разрыва коэффициентов. Проведён сравнительный спектральный анализ особых случаев с непрерывным потенциалом и непрерывным ведущим коэффициентом. Особое внимание уделено изоспектральным конфигурациям, возникающим вследствие перестановок слоёв и симметрий коэффициентов. Численные примеры подтверждают полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: задача Штурма–Лиувилля, кусочно-постоянные коэффициенты, граничные условия, изоспектральность, матрица монодромии.

ISOSPECTRAL CONFIGURATIONS AND MATCHED SOLUTIONS IN STURM–LIOUVILLE PROBLEMS WITH PIECEWISE-CONSTANT COEFFICIENTS.

Abdikerim Karlyga Kenzhebekkyzy

This paper considers a generalized second-order Sturm–Liouville problem with piecewise-constant coefficients. Unified theorems are obtained to match solutions at the points of discontinuity of the coefficients. A comparative spectral analysis of special cases with a continuous potential and a continuous leading coefficient is carried out. Particular attention is paid to isospectral configurations arising from *layer permutations and symmetries of the coefficients. Numerical examples confirm the obtained theoretical results.*

Keywords: Sturm–Liouville problem, piecewise-constant coefficients, boundary conditions, isospectrality, monodromy matrix.

REFERENCES

1. Alexander Ivanovich Shestakov (2003). Inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with piecewise coefficients. *Siberian Mathematical Journal*, 44(5), 1142–1162.
2. Ainur Chol (2015). Inverse spectral problem for a Sturm–Liouville operator with cubic polynomials of the spectral parameter in the boundary conditions and discontinuous coefficient. *Advances in Difference Equations*, 2015(132), 1–16. DOI: 10.1186/s13662-015-0478-7
3. Khanlar R. Mamedov (2010). Inverse scattering problem for a discontinuous Sturm–Liouville equation with spectral parameter in the boundary condition. *Boundary Value Problems*, 2010, Article 171967. DOI: 10.1155/2010/171967
4. Ozge Akcay (2021). Inverse scattering problem for a Sturm–Liouville operator with transmission conditions on the positive half-axis. *International Journal of Pure and Applied Sciences*, 7(3), 401–409.
5. Chuan-Fu Yang & Natalia Petrovna Bondarenko (2019). Local solvability and stability of inverse problems for Sturm–Liouville operators with discontinuity. *arXiv preprint*, arXiv:1906.06552.
6. Vladimir Alexandrovich Marchenko (2011). *Sturm–Liouville Operators and Their Applications.* AMS Chelsea Publishing.
7. Boris Moiseevich Levitan (1987). *Inverse Sturm–Liouville Problems.* VNU Science Press.
8. Boris Moiseevich Levitan & Ilya Samsonovich Sargsyan (1991). *Sturm–Liouville and Dirac Operators.* Springer.
9. Gerhard Freiling & Vladimir Alexandrovich Yurko (2001). *Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications.* Nova Science Publishers.
10. Vladislav Vladimirovich Kravchenko (2020). *Direct and Inverse Sturm–Liouville Problems: A Method of Solution.* Birkhäuser.