

АРАЛАС ТИПТІ БӨЛІКТІ-ТҰРАҚТЫ АРГУМЕНТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ КІРІСПЕ: ТАРИХЫ ЖӘНЕ КЛАССИФИКАЦИЯСЫ

Ыдырыс Шырын Кенжебекқызы

Физика-математика факультетінің магистранты, Қ.Жұбанов атындағы
Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

Ғылыми жетекші: PhD, Нугаева З.Т.

Бұл мақалада динамикалық жүйелер теориясының дамуы және оның гибридік жүйелерге, соның ішінде бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулерге (БТАДТ) қолданылуы қарастырылады. БТАДТ-ның қалыптасу тарихы, шешімдердің бар болуы мен бірегейлігі, тұрақтылық, периодтылық және тербелмелі қасиеттері талданады. Сонымен қатар, профессор Марат Ахметтің ғылыми еңбектерінде дамытылған аралас типті бөлікті-тұрақты аргументке қатысты идеялардың БТАДТ теориясын тереңдетудегі рөлі атап өтіліп, үзіліссіз және дискретті динамиканы бір модель аясында сипаттауға мүмкіндік беретін бұл бағыттың теориялық әрі қолданбалы маңызы қысқаша сипатталады.

Кілт сөздері: динамикалық жүйелер, гибридік жүйелер, бөлікті-тұрақты аргумент, аралас типті аргумент, секіру теңдеуі, үзіліссіз динамика, периодты шешім.

Кіріспе

Динамикалық жүйелер теориясы жұлдыздар мен планеталардың қозғалысын зерттеу барысында қалыптасты. Уақыт өте келе оның қолданылу аясы кеңейіп, жеке механизмдерді, электрондық жүйелерді және әртүрлі үдерістерді талдауда да пайдаланылатын болды. Талдау көбіне үзіліссіздік пен шексіздікке ұмтылу жорамалдарына сүйенді. Алайда қазір біз жаңа сипаттағы қиындықтарға тап болудамыз: мысалы, өмір сүру уақыты шектеулі құбылыстар мен өлшемі өте үлкен модельдер. Бұл үдерістер бір-бірімен байланысқан және олардың қозғалысы кезекпен үзіліссіз және үзілісті түрде жүреді. Осындай міндеттерді шешу үшін оң жағында үзіліс болатын дифференциалдық теңдеулер, импульстік дифференциалдық теңдеулер және гибридік жүйелер сынды жаңа құралдар қажет.

Гибридік жүйелер бұл динамикалық жүйелер теориясындағы салыстырмалы түрдегі ұғым және олардың маңызды қолданбалары бар. Жалпы түрде айтқанда, егер модель үзіліссіз және дискретті динамиканың үйлесімді қатар қамтитын болса, оны гибридік деп атаймыз. Яғни, кейбір тәуелді

айнымалылар дифференциалдық теңдеулерді, ал басқалары — дискретті теңдеулерді қанағаттандырады. Бұдан бөлек, кейбір айнымалылар кезектесіп дифференциалдық және дискретті теңдеулерге бағынуы мүмкін. Гибридтік жүйелердің неғұрлым нақты және жалпы анықтамалары [1-4] жұмыстарында берілген.

N, Z және R арқылы сәйкесінше натурал сандардың, бүтін сандардың және нақты сандардың жиындарын белгілейік. Екі жағынан да шексіз, дискретті θ_i ($i \in Z, i < i + 1$) сандар тізбеген қарастырайық, оларды [6] кітапта *үзіліс сәттері*, [7] еңбекте *ауыспалы сәттер* (*switching moments*) деп атайды. [8] еңбегіне сәйкес, бұл сәттерді *оқиға уақыты* (*event time*) деп те атаған.

Нәтижелер гибридтік жүйелерге қатысты және олар әртүрлі режимде — үзіліссіз және үзілісті — жұмыс істейтін жүйелерді модельдеу негізінде алынған. Гибридтік жүйелердің бір мысалы ретінде импульстік дифференциалдық теңдеулерді қарастыруға болады [6]:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x), & t \neq \theta_i, \\ \Delta x|_{t=\theta_i} &= I_i x(\theta_i). \end{aligned} \quad (1)$$

мұндағы,

$$\Delta x|_{t=\theta_i} = x(\theta_i +) - x(\theta_i) = I_i x(\theta_i) \quad (2)$$

секіру теңдеуі (*jump equation*) деп аталады.

Гибридтік жүйелердің тар бір класын қарастырамыз.

Егер t үзіліссіз бөлікте болса, онда $x(t)$ дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады; ал басқа жағдайда, яғни оқиға сәтінде, x — тің секіру мәні (2) секіру теңдеуімен анықталады. Әрбір оқиға уақытына ауысу мен секіру сәйкес келеді. Яғни, әрбір оқиға сәтінде белгілі бір құбылыс орын алады: x және t айнымалылары секіреді, ал осы мезетте дифференциалдық теңдеудің және секіру теңдеуінің оң жақ бөлігі өзгереді.

Гибридтік жүйені нақты сипаттау үшін оқиғалар мен ауысу сәттерін анықтау қажет. Егер оқиғалар сыртқы әсерден туындаса, онда ауыспалар мен секірулер басқарылатын болады, ал егер олар жүйенің өз ішінде пайда болса, онда бұл автономды гибридтік жүйе деп аталады [8].

1980-жылдардың басында К. Кук, С. Бузенберг, Дж. Винер және С. Шах жаңа типтегі дифференциалдық теңдеулерді зерттей бастады. Олар бұл теңдеулерді *бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулер* (БТАДТ) деп атады. БТАДТ-ның теориялық және қолданбалы мәселелерін жүйелі зерттеу дәл осы кезеңнен бастау алады. Мұндай теңдеулерге қызығушылықтың артуына олардың математика, биология, инженерия және физика сияқты түрлі салаларда кездесетін күрделі динамикалық процестерді бейнелеуге қабілеттілігі себеп болды. Бөлікті-тұрақты аргументті математикалық модельдер алғаш рет 1982 жылы Бузенберг пен Кук [9]

тарапынан қарастырылған. Олар тікелей берілетін жұқпалы ауруларды талдау үшін бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу ұсынды. Осы іргелі еңбектен кейін көптеген зерттеушілер БТАДТ дискреттік теңдеулерге келтіру әдісін пайдалана отырып, олардың әртүрлі типтерін жан-жақты зерттеуге кірісті.

БТАДТ-қа деген ерекше назар “On Certain Problems in the Theory of Differential Equations with Deviating Argument” [10] еңбекте атап көрсетілген. Бұл жұмыста А. Мышкис аргументі өзгермелі теңдеулердің айырма теңдеулерге жақын келетін бірнеше түрін бөліп көрсетеді. Ол импульстік (соққы және секіріс сәттері бар) дифференциалдық теңдеулерді, жүктелген теңдеулерді (аргументтің белгілі тұрақты мәндеріндегі шешімдерді қамтитын), сондай-ақ $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(h(t)))$ түріндегі теңдеулерді қарастырады, мұндағы $h(t) = [t]$ - кешіктірілген аргумент, (аргументтің белгілі бір уақыт аралығында өзгеріссіз сақталуын сипаттайтын функция).

К. Кук және оның әріптестері қарастырған БТАДТ әдетте келесі түрге ие:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x([t])), \quad (3)$$

немесе

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), x\left(2\left[\frac{t+1}{2}\right]\right)\right), \quad (4)$$

мұндағы $t \in R$, $x \in R^n$, ал $[\cdot]$ — бүтін бөлік функциясын (ең үлкен бүтін сан функциясы) білдіреді. Бұл теңдеулер дифференциалдық теңдеулер мен айырма теңдеулерге тән ерекшеліктерді бір жүйеде тоғыстыратын болғандықтан, олар үзіліссіз және дискретті жүйелердің гибридин құрайды.

(3) және (4) теңдеулер гибридік үзіліссіз/дискреттік уақыттық жүйелерге жатады. Шынында да, (4) теңдеуі де ұқсас сипатта болғандықтан, (3) теңдеуін қарастырайық. Бұл жүйеде бүтін сандардың тізбегі ауысу сәттерінің тізбегі болып табылады: $\theta_k = k$, мұндағы $k \in Z$.

$f(t, x, w)$ функциясын қарастырайық. Мұнда $w = x([t])$ деп таңдау жүйенің оң жағындағы ауысуды анықтайды. Уақыттың динамикасы әрі үзіліссіз, әрі дискретті сипатқа ие. Дискреттік динамика мына теңдеумен анықталады:

$$\theta_{k+1} = \theta_k + 1, \theta_0 = 0.$$

(3) теңдеудегі ең үлкен бүтін сан функциясы динамиканы анықтайтын болғандықтан, мұндағы ауысу автономды деп саналады.

Енді БТАДТ-дің рөлін дифференциалдық теңдеулер теориясында және олардың қолданбаларында мұқият қарастырайық. Айта кету керек, осы бағыттың бастапқы кезеңіне тән көптеген маңызды нәтижелер [11] еңбегінде жүйелі түрде топтастырылған. Бұл еңбек — БТАДТ теориясын басты зерттеу

нысаны ретінде қарастыратын және оны толық қамтитын сирек кездесетін монографиялардың бірі. Сонымен қатар, теория бойынша қызықты нәтижелер К. Гопалсамидің [12] және И. Гёри мен Г. Ладастың [13] еңбектерінде де кездеседі. Бұл еңбектерде орнықтылық пен тербелмелі шешімдер қарастырылған. В. Лакшмикантхам және Дж. Винер [14] еңбегінде келесі бастапқы шарттағы есеп үшін шешімнің бар болуы мен жалғыздығы туралы теореманы дәлелденген:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(g(t))), \quad x(0) = x_0 \quad (5)$$

мұндағы f — үзіліссіз функция, ал $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — сатылы функция (step function). Яғни, $g(t)$ әрбір $[t_n, t_{n+1})$ аралығында тұрақты және $g(t) = g(t_n)$ мәніне тең, мұнда $\{t_n\}$ — нақты сандардың қатаң өспелі тізбегі, әрі $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$.

[16] еңбекте БТАДТ-дің мына түрі зерттелген:

$$\ddot{x} + \omega^2 x(t) = -b\dot{x}([t - 1]), \quad (6)$$

мұндағы b және ω — оң тұрақтылар.

Зерттеу нәтижесінде бұл теңдеу кей жағдайларда периодты тіпті шексіз өсетін шешімдер тудыруы мүмкін екені анықталған, ал сәйкес келетін жәй дифференциалдық теңдеудің $\ddot{x} + b\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$, барлық шешімдері $t \rightarrow \infty$ кезінде нөлге ұмтылады.

Периодты және дерлік периодты шешімдердің бар болуы мәселесі жәй және функционалдық дифференциалдық теңдеулердің сапалық теориясында физикалық ғылымдар үшін маңызды болғандықтан ең қызықты тақырыптардың бірі болып саналатындығы белгілі. [15,16,17] еңбектерінде дерлік периодты шешімдердің бар болуы зерттелген. Квазипериодты шешімдердің бар болуы туралы зерттеу мақалаларының мысалдары [18], ал периодты шешімдер туралы [19] еңбегі қаралған. Грин функциясы және салыстыру принциптері [20] еңбектерінде талқыланған.

Жоғарыда аталған нәтижелердің теориялық мүмкіндіктері негізінен БТАДТ зерттеу тәсіліне сүйенеді. Бұл тәсілде мұндай теңдеулер дискретті теңдеулерге дейін қарапайымдатылады. Соның салдарынан теорияның қолданылу аясы тар болып, жәй дифференциалдық теңдеулер мен функционалдық дифференциалдық теңдеулерге қатысты көптеген белгілі нәтижелер бұл талдаудан тыс қалып отыр.

Мысал 1.1. Мына скалярлық теңдеуді қарастырайық

$$\frac{dx}{dt} = ax([t]) \quad (7)$$

мұндағы a – нақты тұрақты сан. Теңдеуді бастапқы шартпен шешейік: $x(0) = x_0$, мұндағы x_0 – берілген нақты сан. Егер $t \in [0,1]$ болса, теңдеудің формасы мынадай болады:

$$\frac{dx}{dt} = ax_0,$$

соның нәтижесінде $x(t) = x_0(1 + at)$, $x(1) = x_0(1 + a)$. Сол сияқты жалғастыра отырып, келесіні аламыз:

$$x(k + 1) = x_0(1 + a)^k \quad (8)$$

Айта кету керек, теңдеу (7)-ні (8)-дің негізінде талдау, іс жүзінде, дискретті теңдеулерге редукциялау әдісінің мәні болып табылады.

Модель (8)-ді қарастыра отырып, мысалы, $a = -2$ болса, (7) теңдеуінің шешімі 2-периодтық екенін байқауға болады. Сонымен қатар, нөлдік шешім асимптотикалық тұрақты болады, егер $-2 < a < 0$ және $t_0 = 0$. Айта кету керек, бүтін емес уақыт сәтінен басталатын (7) теңдеуінің шешімдерінің болуы және олардың орнықтылығын қосымша талдау қажет. Сол уақытта, мысал көрсетіп тұрғандай, бөлікті-тұрақты аргумент енгізу теңдеулерге бұрмалама енгізу сияқты болып, Мальтус моделіне тербелістер туғызады.

БТАДТ бастапқыда дискреттік жүйелерге келтіру негізінде зерттелді. Яғни, шешімдер тек бүтін санды немесе олардың еселіктеріне сәйкес келетін мәндері ғана қарастырылды. Бұдан бөлек, егер аргумент ығыспаған болса, жүйелер шешімдердің мәндері бойынша сызықтық болуы тиіс еді. Мұндай талаптар зерттеудің теориялық тереңдігін және нақты өмірлік мәселелерді модельдеудің аясын айтарлықтай шектейді.

Профессор М. Ахмет 2005 жылы Флорида технологиялық институтында өткен «Conference on Differential and Difference Equations» конференциясында *бөлікті-тұрақты аргументті* неғұрлым жалпы түрде сызықтық емес дифференциалдық теңдеулер мен оларға балама интегралдық теңдеулерді зерттеу негізінде қарастыруды алғаш рет ұсынды [5]. Бұл бағыт БТАДТ теориясын дамытуда жаңа мүмкіндіктер ашты. М. Ахмет бұл тәсілдің көмегімен енгізілген зерттеу бағытын кеңейтіп қана қоймай, сонымен қатар жаңа құбылыстарды байқауға және қарастырылып отырған жүйелердің функционалдық дифференциалдық теңдеулер болуына қарамастан, олардың жай дифференциалдық теңдеулер теориясымен ұқсастықтығын тереңірек түсінуге болатынын көрсетті.

Мақалада қарастырылатын дифференциалдық теңдеулер гибридік жүйелер класына жатады. Нақтырақ айтқанда, оларды аргументі ауытқитын дифференциалдық теңдеулерге немесе функционалдық дифференциалдық теңдеулерге жатқызуға болады. Дегенмен, БТАДТ-не қолданылатын зерттеу әдістері функционалдық дифференциалдық теңдеулер үшін қолданылатын

тәсілдерден өзгеше. Бастапқы еңбектерде мұндай теңдеулер дискреттік теңдеулерге дейін ықшамдалған болатын.

Бір жағынан, БТАДТ дифференциалдық және айырма теңдеулер теорияларының қиылысу нүктесінде орналасқан деп айтуға болады. Екіншіден, БТАДТ-дің қасиеттері жай дифференциалдық теңдеулерге өте жақын.

Негізгі бөлім

Бөлікті-тұрақты аргументті жүйелердің жалпы сипаттамасын берейік. Мұндай жүйелердің негізгі ерекшелігі — аргумент ретінде бөлікті-тұрақты функциялардың қолданылуы. Сондықтан алдымен осы функциялардың анықтамасын көрсету қажет.

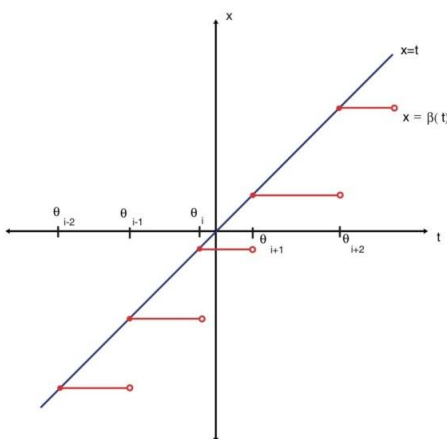
$J \subseteq R$ интервалын алып, $\theta = \{\theta_i\}, \theta \subset J$, арқылы нақты сандардан тұратын реттелген тізбекті белгілейік, мұндағы i индекстері $A \subset Z$ жиынынан алынған. Сонымен қатар, $\zeta = \{\zeta_i\}, i \in A, J$ интервалындағы элементтердің басқа тізбегі болсын. Біз ζ ешқандай шектеу қоймаймыз.

Егер $\theta_i \leq t < \theta_{i+1}, i \in A$ болғанда, ζ_i -ге тең болатын функцияны J интервалында анықталған η -типті деп атайды және оны $\eta(t)$ деп белгілейді.

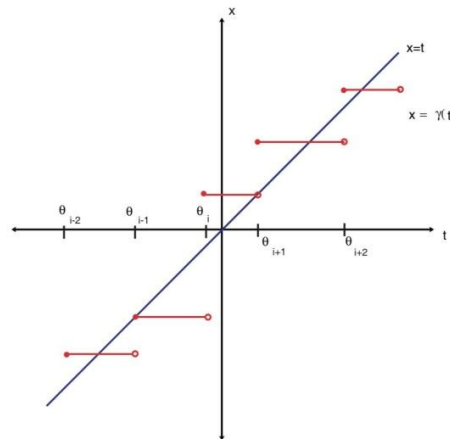
Бұл қарастырылған аргумент-функциялардың ең жалпы типі болып табылады.

Келесідей η -типті функциялардың түрлерін қарастырайық.

Егер $\zeta_i = \theta_i, i \in A$ болса, онда функция β -типті деп аталып, оны $\beta(t)$ деп белгілейміз. Ең үлкен бүтін функция $[t]$, яғни t -дан кіші барлық бүтін сандардың ішінен ең үлкені, $\beta(t)$ функциясының мысалы болып табылады, мұндағы $\theta_i = i, i \in Z$. Сол сияқты, $\beta(t) = 2[t/2]$ болады, егер $\theta_i = 2i, i \in Z$ болса. $\beta(t)$ функциясының графигін 1.1-суретте көруге болады.



1.1-сурет. $\beta(t)$ аргументінің графигі



1.2-сурет. $\gamma(t)$ аргументінің графигі

Егер $\theta_i \leq \zeta_i \leq \theta_{i+1}$ шарты барлық $i \in A$ үшін орындалса, онда γ -типтес функция деп атаймыз және $\gamma(t)$ деп белгілейміз. Мысалы, $2[(t+1)/2] - \gamma(t)$ типтес функция екенін оңай табуға болады, мұнда $\theta_i = 2i - 1, \zeta_i = 2i$. 1.2-

суретте $\gamma(t)$ типтес функцияның графигі көрсетілген. R^{n+1} – де $X \times J$ ішкі жиынын бекітейік, мұнда X — ашық және байланысқан жиын, ал $J \subset R$. Келесі типтегі жүйелерді қарастырайық:

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(\eta(t))) \quad (9)$$

мұндағы η — η -типтес функция. $f(t, x, y)$ функциясы үзіліссіз болсын делік. (9) түріндегі жүйелерді бөлікті аргументті дифференциалдық теңдеулер деп атаймыз.

Назарымызды β немесе γ типтес аргументі бар жүйелерге аударайық:

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(\beta(t))), \quad (10)$$

және

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(\gamma(t))) \quad (11)$$

Бұл жүйелер *гибридті үзіліссіз/дискреттік* уақыт динамикалық жүйелер болып табылады. Шын мәнінде, (11)-ді жалпырақ жүйе деп қарастыруға болады. Ауыстыру сәттерінің тізбегі $\theta_k, k \in Z$ деп берілген. Егер біз $f(t, x, w)$ функциясын алсақ, онда $t = \theta_k$ сәтіндегі оң жақ бөліктің ауысуы $w = x(\zeta_k)$ арқылы аныкталады. Ауыстыру сәттерінің тізбегі алдын ала берілгендіктен, бізде оқиға уақыты басқарылатын болады.

$\gamma(t)$ аргумент функциясы аралас типтес болады. $k \in N$ таңдап, $[\theta_k, \theta_{k+1})$ интервалындағы жүйені қарастырайық. Сол кезде $\gamma(t)$ сәйкестендіру функциясы ζ_k -ге тең болады. Егер t аргументі $\theta_k \leq t < \zeta_k$ аралығында болса, онда $\gamma(t) > t$ және (11) *алдыға жылжытылған аргументті* (advanced argument) теңдеу болады. Осы сияқты, егер $\zeta_k < t < \theta_{k+1}$ болса, онда $\gamma(t) < t$ және, сондықтан, (11) *кейінге жылжытылған* немесе *кешіктірілген аргументті* (delayed argument) теңдеу болады. Сондықтан, атап өту керек, (11) теңдеуі аралас типтес болып табылады.

Аралас типті бөлікті-тұрақты аргументті жалпы түрде қарастыру идеясы профессор Марат Ахметтің ұсынған ғылыми тәсілінен бастау алады. Бұл тәсіл бөлікті-тұрақты аргументтің құрылымын жаңа қырынан түсіндіруге мүмкіндік беріп, аргументтің белгілі бір интервалдарда алға жылжитын және кейінге ығысатын қасиеттерін бір жүйеде біріктіретін аралас типті модельдерді зерттеуге жол ашты. Мұндай құрылым функционалдық дифференциалдық теңдеулерге тән ерекшеліктерді сақтай отырып, оларды жай дифференциалдық теңдеулер теориясына жақындататын жаңа динамикалық құбылыстарды айқындауға мүмкіндік береді. Осы теориялық жаңалықтарды ескере отырып, өз жұмысымызда бөлікті-тұрақты аргументтің дәл осы аралас типтегі құрылымын «Ахмет типті бөлікті-тұрақты аргумент» деп атауды ұсынамыз. Бұл атау аргумент функциясының табиғатын нақты көрсетуге әрі осы бағыттың ғылыми

дамуына М. Ахметтің қосқан фундаменталды үлесін белгілеуге мүмкіндік береді.

Қосымша қызығушылық тудыратын тақырып — бөлікті-тұрақты жүйелер келесі формада:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + F(t, x(\theta_{\vartheta(t)-p_1}), x(\theta_{\vartheta(t)-p_2}), \dots, x(\theta_{\vartheta(t)-p_k})), \quad (12)$$

мұндағы $x \in R^n, t \in R, \nu(t) = i$ егер $\theta_i \leq t < \theta_{i+1}$ болса, $i = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ — сәйкестендіру функциясы, θ_i — нақты сандардың реттік тізбегі, сол және оң жақта шексіз, $p_j, j = 1, 2, \dots, m$ — берілген бүтін сандар. Бұл теңдеулер (9) жүйелерінің жалпы классына жатады, мұндағы $\eta_j(t) = \theta_{\vartheta(t)-p_j}, j = 1, 2, \dots, k$.

$\beta(t)$ және $\gamma(t)$ аргумент функциялары үзілісті болғанымен, (10), (11) және (12) теңдеулерінің шешімдері үзіліссіз функциялар болады. Сондықтан шешім процесінде жүйелердің оң жақ бөлігі $\theta_i, i \in Z$ сәттерінде үзілістерге ие болады. Қорытындылай келе, БТАДТ шешімдері туындылары үзілісті болатын, $[\theta_i, \theta_{i+1}), i \in A$ интервалдарында үзіліссіз дифференциалданатын үзіліссіз функциялар болады.

Анықтама 1.1. $x(t)$ функциясы J интервалында БТАДТ-дің шешімі деп аталады, егер:

- (i) $x(t)$ функциясы J интервалында үзіліссіз болса;
- (ii) $\dot{x}(t)$ функциясының туындысы J интервалында бар болса, тек $\theta_i, i \in A$ нүктелерін қоспағанда, онда біржақты туындылар бар;
- (iii) $x(t)$ әрбір $(\theta_i, \theta_{i+1}), i \in A$ интервалында (10) (11) теңдеуді қанағаттандырады, сонымен қатар $\theta_i, i \in A$ нүктелерінде $x(t)$ -тің оң жақ туындысы бойынша теңдеу орындалатын болса.

Тіпті жәй БТАДТ үшін де шешімдер әрдайым сол жақта болмайды, және сонымен қатар шешімнің жалғыздығына қатысты қиындықтар туындауы мүмкін.

Мысал 1.3. Келесі теңдеуді қарастырайық:

$$\dot{x} = 2x - x^2([t]) \quad (13)$$

мұндағы $x \in R, t \in R, z \in R$ таңдап, $x(t) = x(t, 1, z)$, $x(1) = z$, функциясы (13) теңдеудің шешімі болсын.

Енді шешімді $t < 1$ үшін анықтауға тырысайық. Егер $t \in [0, 1]$ болса, онда $x(t)$ келесі теңдеуді қанағаттандырады:

$$\dot{x} = 2x - x^2(0) \quad (14)$$

$x(0) = x_0$ деп белгілейік, және $T : R \rightarrow R$ операторын енгізейік:

$$Tx_0 = \exp(2)x_0 + \int_0^1 \exp(2(1-s))x_0^2 ds$$

Егер $x(t)$ $[0,1]$ интервалында бар болса, онда $Tx_0 = z$ теңдеуі x_0 бойынша шешілуі керек. Бірақ соңғы теңдеудің формасы былай:

$$[\exp(2) - 1]x_0^2 + 2\exp(2)x_0 - 2z = 0$$

Бұл теңдеуді барлық $z \in R$ үшін шешу мүмкін емес, сондықтан барлық $x(t, 1, z), z \in R$ шешімдерін $t = 0$ -ге дейін жалғастыру мүмкін емес.

Кейін біз шешімдердің солға жалғасқандағы бірегейлігін қарастырамыз. $x_0, x_1 \in R$ сандарын таңдап, $x_1 \neq x_0$ болсын, сондай жағдайда

$$(x_0 + x_1)(1 - \exp(2)) = 2\exp(2).$$

$x_0(t) = x(t, 0, x_0)$ және $x_1(t) = x(t, 0, x_1)$ функцияларын (13) теңдеудің шешімдері деп белгілейік. $t \in [0,1]$ интервалында олар сәйкесінше келесі теңдеулердің шешімдері: $\dot{x} = 2x - x_0^2$ және $\dot{x} = 2x - x_1^2$

болып табылады. Оңай тексеруге болады, $Tx_0 = Tx_1$, яғни $x_0(1) = x_1(1)$ және (13) теңдеудің $x(t, 1, x_1(1))$ шешімін $t = 0$ -ге бірегей жалғастыру мүмкін емес.

Қорытынды

БТАДТ-ді зерттеу қазіргі математикалық талдау мен қолданбалы модельдеудің маңызды бағыттарының бірі болып табылады. Бұл теңдеулердің пайда болу тарихы 1980-жылдардағы К. Кук, С. Бузенберг, Дж. Винер және С. Шах еңбектерінен бастау алып, олардың бөлікті-тұрақты аргумент ұғымын енгізуі арқылы жаңа ғылыми бағыт қалыптасты. Кейінгі зерттеулер шешімдердің бар болуы мен жалғыздығын талдауға, тербелістер, орнықтылық, периодтылық және интегралдық көпжақтар сияқты күрделі динамикалық қасиеттерді сипаттауға бағытталды. БТАДТ-ның биология, механика, инженерия және электроника секілді қолданбалы салаларда кеңінен пайдаланылуы бұл теорияның өзектілігін одан әрі күшейтті.

Профессор М. Ахметтің аралас типті бөлікті-тұрақты аргументті жалпы құрылымда қарастыруды ұсынуы аталған бағыттың дамуында жаңа кезең бастады. Аргументтің алға жылжитын және кейінге ығысатын қасиеттерін бір жүйеде біріктіру математикалық модельдердің табиғатын тереңірек түсінуге және жаңа динамикалық құбылыстарды анықтауға мүмкіндік берді. Осыған байланысты аралас типтегі бөлікті-тұрақты аргументті құрылымды, әрі қарай, «Ахмет типті бөлікті-тұрақты аргумент» деп атау зерттелетін жүйелердің ерекшелігін айқындап, теориялық дамудағы автордың үлесін нақты көрсетуге мүмкіндік береді.

Жүргізілген тарихи және теориялық талдаулар болашақта БТАДТ-ді оқытуда, математикалық модельдеу мазмұнын жетілдіруде және қолданбалы бағыттағы білімді тереңдетуде тиімді негіз бола алады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Bect, J. (2010). A unifying formulation of the Fokker-Planck-Kolmogorov equation for general stochastic hybrid systems. *Nonlinear Anal. Hybrid Syst*, 4, 357–370.
2. Cooke, K. L., Turi, J., & Turner, G. (1991). Stabilization of hybrid systems in the presence of feedback delays. Preprint Series 906, Institute of Mathematics and Its Applications, University of Minnesota.
3. Dhage, B., Lakshmikantham, V. (2010). Basic results on hybrid differential equations. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 4, 414–424.
4. De la Sen, M., Ibeas, A. (2009). Stability results of a class of hybrid systems under switched continuous-time and discrete-time control. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 315713, 28 pp.
5. Akhmet, M. U. (2006). On the integral manifolds of the differential equations with piecewise constant argument of generalized type. In R. P. Agarwal & K. Perera (Eds.), *Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations at the Florida Institute of Technology*, August 1–5, 2005 (pp. 11–20). Hindawi Publishing Corporation.
6. Akhmet, M. U. (2010). *Principles of discontinuous dynamical systems*. Springer, New York.
7. Savkin, A. V., Evans, R. J. (2002). *Hybrid dynamical systems: Controller and sensor switching problems*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin.
8. van der Schaft, A. J., Schumacher, J. M. (2000). *An introduction to hybrid dynamical systems*. Springer, London.
9. Busenberg, S., Cooke, K. L. (1982). Models of vertically transmitted diseases with sequential continuous dynamics. In *Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences* (pp. 179–187). Academic Press, New York.
10. Myshkis, A. D. (1977). On certain problems in the theory of differential equations with deviating argument. *Russian Mathematical Surveys*, 32, 181–213.
11. Wiener, J. (1993). *Generalized solutions of functional differential equations*. World Scientific, Singapore.
12. Gopalsamy, K. (1992). *Stability and oscillation in delay differential equations of population dynamics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
13. Gyori, I., Ladas, G. (1991). *Oscillation theory of delay differential equations with applications*. Oxford University Press, New York.
14. Wiener, J., Lakshmikantham, V. (2000). Differential equations with piecewise constant argument and impulsive equations. *Nonlinear Studies*, 7, 60–69.
15. Wiener, J., Lakshmikantham, V. (2000). A damped oscillator with piecewise constant time delay. *Nonlinear Studies*, 7, 78–84.

16. Alonso, A., Hong, J., Obaya, R. (2000). Almost-periodic type solutions of differential equations with piecewise constant argument via almost periodic type sequences. *Applied Mathematics Letters*, 13, 131–137.
17. Hong, J., Obaya, R., Sanz, A. (2001). Almost periodic type solutions of some differential equations with piecewise constant argument. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 45, 661–688.
18. Yuan, R. (2002). The existence of almost periodic solutions of retarded differential equations with piecewise argument. *Nonlinear Analysis*, 48, 1013–1032.
19. Kupper, T., Yuan, R. (2002). On quasi-periodic solutions of differential equations with piecewise constant argument. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 267, 173–193.
20. Wang, G. Q., Cheng, S. S. (2006). Existence of periodic solutions for second order Rayleigh equations with piecewise constant argument. *Turkish Journal of Mathematics*, 30, 57–74.

ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ АРГУМЕНТОМ СМЕШАННОГО ТИПА: ИСТОРИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ

Ыдрыс Шырын Кенжебекқызы

В этой статье рассматривается развитие теории динамических систем и её применение к гибридным системам, в частности к дифференциальным уравнениям с кусочно-постоянным аргументом (ДКПА). Анализируются история формирования ДКПА, существование и единственность решений, устойчивость, периодичность и колебательные свойства. Кроме того, подчеркивается роль идей о кусочно-постоянном аргументе смешанного типа, разработанных в научных трудах профессора М. Ахмета, в углублении теории ДКПА, а также кратко рассматривается теоретическая и прикладная значимость этого направления, позволяющего описывать непрерывную и дискретную динамику в рамках одной модели.

Ключевые слова: динамические системы, гибридные системы, кусочно-постоянный аргумент, аргумент смешанного типа, уравнение с разрывом, непрерывная динамика, периодическое решение

INTRODUCTION TO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MIXED-TYPE PIECEWISE-CONSTANT ARGUMENTS: HISTORY AND CLASSIFICATION

Ydrys Shyryn Kenzhebekkyzy

This article examines the development of dynamical systems theory and its application to hybrid systems, in particular to differential equations with piecewise-constant argument (DPCA). The history of DPCA, the existence and uniqueness of solutions, stability, periodicity, and oscillatory properties are analyzed. Furthermore, the role of ideas on mixed-type piecewise-constant arguments, developed in the scientific works of Professor M. Ahmet, is emphasized in advancing DPCA theory, and the theoretical and practical significance of this approach—which allows both continuous and discrete dynamics to be described within a single model—is briefly discussed.

Keywords: dynamical systems, hybrid systems, piecewise-constant argument, mixed-type argument, jump equation, continuous dynamics, periodic solution