

ӘОЖ 512.81

ЖОҒАРЫ ДӘРЕЖЕЛІ ТЕНДЕУЛЕРДІ ШЕШУ ӘДІСТЕРІ***Каскирбаева Нурайым***

магистрант, Қорқыт ата атындағы Қызылорда университеті,
Қызылорда, Қазақстан

Ғылыми жетекші: Менлихожаева Саулеш Қойлыбайқызы
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда университетінің қауымдастырылған
профессоры, п.ғ.к.

Мақалада жоғары сынып математикасының маңызды және күрделі тақырыптарының бірі – жоғары дәрежелі теңдеулерді шешу әдістері қарастырылды. Жоғары дәрежелі теңдеулер деп белгісіз айнымалының дәрежесі екіден жоғары болатын теңдеулерді атаймыз. Мұндай теңдеулерді шешу оқушылардан алгебралық білімді, логикалық және аналитикалық ойлау қабілетін талап етеді. Осы жұмыстың өзектілігі – жоғары дәрежелі теңдеулерді шешудің әртүрлі әдістерін меңгерту арқылы оқушылардың есеп шығару дағдыларын жетілдіріп, күрделі есептерді шешуге деген сенімділігін арттыру мүмкіндіктерінің қарастырылуында. Мақалада осы тақырыпқа қатысты теориялық және практикалық зерттеу нәтижелері ұсынылады.

Кілт сөздер: жоғары дәрежелі теңдеулер, шешу әдістері, алгебра, көбейткіштерге жіктеу, Виет теоремасы, Безу теоремасы.

Кіріспе. Жоғары дәрежелі теңдеулерді шешу әдістері мектеп математикасының маңызды құрамдас бөлігі болып табылады. Мұндай теңдеулерді шешу әдістері оқушыларға тек алгебралық дағдыларды ғана емес, сонымен қатар аналитикалық және логикалық ойлауды дамытады. Сондықтан бұл тақырыпқа жүйелі түрде тоқталып, оның шешу жолдарын терең меңгерту – сапалы білім берудің маңызды аспектісі болып табылады.

Зерттеу әдіснамасы. Жоғары дәрежелі теңдеулерді шешу әдістерін зерттеу барысында теориялық (әдебиеттерді талдау), практикалық (есептер шығару), эксперименттік әдістер қолданылды. Зерттеу мектеп математикасы бағдарламасы шеңберінде жүргізіліп, 9-11 сынып оқушыларына арналған оқу бағдарламалары мен оқулық материалдары негізге алынып, тақырып аясында әдебиеттерге шолу жасалды [1-4].

Бірінші кезеңде жоғары дәрежелі теңдеулердің анықтамасы, түрлері және олардың математикалық ерекшеліктері талданды. Осы негізде жоғары дәрежелі

теңдеулерді шешудің жиі қолданылатын классикалық әдістері іріктелді: көбейткіштерге жіктеу, жаңа айнымалы енгізу, Виет және Безу теоремаларын қолдану.

Екінші кезеңде осы әдістердің тиімділігін бағалау үшін түрлі деңгейдегі теңдеулер алынып, әр әдістің практикалық қолдану аясы мен күрделі теңдеулерді шешудегі рөлі анықталды. Әрбір әдістің қолданылу жиілігі мен оқушылар тарапынан түсінілу деңгейі нақты есептер шешу арқылы бағаланды.

Үшінші кезеңде мектеп тәжірибесіне сүйене отырып, оқушылардың жоғары дәрежелі теңдеулерді шешу барысында кездесетін негізгі қиындықтары анықталды. Сонымен қатар, әрбір әдісті меңгеру оқушылардың логикалық және аналитикалық ойлау қабілеттерін дамытуға қаншалықты ықпал ететіндігі қарастырылды.

Бұл зерттеулер жоғары дәрежелі теңдеулерді әртүрлі әдістермен шешіп қана қоймай, әдістің тиімділігін анықтауға көмектеседі.

Зерттеу нәтижелері. Зерттеу нәтижесінде жоғары дәрежелі теңдеулерді шешудің әртүрлі әдістерін меңгеру оқушылардың математика пәніне қызығушылығын арттырып, танымдық белсенділігін дамытуға оң ықпал ететіні анықталды. Әсіресе, теңдеулерді бірнеше әдіспен шешу оқушылардың логикалық ойлауын тереңдетіп, шешімнің дұрыстығын өз бетімен дәлелдеуге мүмкіндік береді. Оқушылар түрлі әдістерді салыстыра отырып, өздері үшін тиімді шешу жолдарын таңдай алды.

Сонымен қатар, зерттеу барысында жоғары дәрежелі теңдеулерді шешу әдістерін қолдану оқушылардың шығармашылық қабілеттерін арттырып, күрделі есептерді шешуде сенімділігін нығайтты. Жоғары сынып оқушылары үшін теңдеулерді бірнеше тәсілмен шешуге үйрену математикалық ойлау мәдениетін қалыптастырып, ғылыми көзқарасын кеңейтті. Бұл оқушылардың пәнге деген қызығушылығын және өздігінен жұмыс істеу дағдыларын айтарлықтай дамытты. Оқушылардың өз беттеріңше ізденуі үшін белгілі авторлардың еңбектері ұсынылды[5,6].

Үшінші дәрежелі $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ теңдеуін әртүрлі әдістермен шешу жолдарын қарастырайық.

1-әдіс. Горнер схемасын пайдаланып, теңдеуді шешу

$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ теңдеуінің сол жағындағы көпмүшеліктің бос мүшесінің бөлгіштерін қарастырамыз. Теңдеуге қойып тексеру арқылы ± 1 мәндері теңдеуді қанағаттандыратынын көре аламыз. Әрі қарай Горнер кестесін қолданамыз:

Кесте. Горнер схемасы

	1	1	-1	-1
1	1	2	1	0
-1	1	1	0	
-1	1	0		

Кестеден көріп тұрғанымыздай, теңдеудің $x = -1$ шешімі еселі түбір болып табылады, яғни $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ теңдеуі мен $(x - 1)(x + 1)^2 = 0$ теңдеуі мәндес болып табылады.

Жауабы: теңдеудің түбірлері $x = \pm 1$.

2-әдіс. Безу теоремасын қолданып, теңдеудің дәрежесін төмендету

$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ теңдеуінің сол жағындағы көпмүшелікті қарастырамыз: $P_3(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ бұл көпмүшеліктің бос мүшесінің бөлгіштерінің арасынан теңдеудің түбірлері болатын мәндерді іздейміз. Бос мүшенің бөлгіштері: ± 1 . Бастапқы теңдеудің орнына қойып тексереміз:

$$P_3(1) = 1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 0$$

$$P_3(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 1 = 0$$

± 1 сандарының екеуі де, теңдеудің түбірлері бола алады. Олай болса, бастапқы теңдеуді $(x - 1)$ және $(x + 1)$ екімүшелеріне бөлеміз.

$x^3 + x^2 - x - 1$	$x - 1$	$x^2 + 2x + 1$	$x + 1$
$x^3 - x^2$	$x^2 + 2x + 1$	$x^2 + x$	$x + 1$
$2x^2 - x$		$x + 1$	
$2x^2 - 2x$		$x + 1$	
$x - 1$		0	
$x - 1$		шыққан $(x^2 + 2x + 1)$	көпмүшелігін
0		$(x + 1)$ екімүшесіне бөлеміз.	

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2$$

Бастапқы теңдеу осындай көбейткіштерге жіктелді. Әр жақшаны жеке-жеке 0-ге теңестіріп, теңдеудің $x_1 = 1$; $x_{2;3} = -1$ түбірлерін табамыз.

Жауабы: $x_1 = 1$; $x_{2;3} = -1$

3-әдіс. Көбейткіштерге жіктеу әдісі

$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ теңдеуінің сол жағын көбейткіштерге жіктейміз. Ол үшін бастапқы екі мүшесі мен соңғы екі мүшесін топтап, ортақ көбейткішті жақша сыртына шығарамыз: $x^2(x + 1) - (x + 1) = 0$.

$(x + 1)(x^2 - 1) = 0$ теңдеуін аламыз. Әр жақшаны жеке-жеке 0-ге теңестіріп, теңдеудің түбірлерін табамыз:

$$1) x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$2) x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{2;3} = \pm 1$$

Жауабы: $x = \pm 1$.

4-әдіс. Виет формуласын қолдану

Үшінші дәрежелі $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ теңдеуі үшін x_1 ; x_2 ; x_3 түбірлері бар болсын. Олай болса, бұл теңдеу үшін мына теңдіктер орынды:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ теңдеуі үшін Виет теоремасын былай жаза аламыз:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1 \\ x_1x_2x_3 = 1 \end{cases}$$

Соңғы теңдікте $x_1x_2x_3 = 1$ болуы үшін $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ болуы керек. Бірақ бұл бірінші теңдікте орындалмайды.

Олай болса, $x_1 = x_2 = -1$; $x_3 = 1$ мәндерін қалған екі теңдікке қойып тексеріп, орындалатынына көз жеткізе аламыз.

Жауабы: $x_1 = x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

5-әдіс. Анықталмаған коэффициенттер әдісі

$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ теңдеуін сызықтық және екінші дәрежелі көпмүшеліктердің көбейтіндісі ретінде жазып аламыз:

$x^3 + x^2 - x - 1 = (x + a)(x^2 + bx + c)$ теңдіктің оң жағындағы жақшаны ашып, ұқсас мүшелерін біріктіреміз:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = x^3 + (a + b)x^2 + (ab + c)x + ac$$

Әрі қарай бірдей дәрежедегі айнымалылардың алдындағы коэффициенттерін теңестіреміз:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ ab + c = -1 \\ ac = -1 \end{cases}$$

Соңғы теңдіктен $a = -1$; $c = 1$ деп алып, бірінші теңдіктен $b = 2$ мәнін таба аламыз. Табылған мәндерді екінші теңдікке қойып, орындалатынына көз жеткіземіз. Олай болса $a = -1$; $b = 2$; $c = 1$.

$(x + a)(x^2 + bx + c) = (x - 1)(x^2 + 2x + 1)$ екі жақшаның көбейтіндісіне жіктелді. Бастапқы берілген теңдеудің түбірлерін табу үшін осы жақшалардың әрқайсысын 0-ге теңестіреміз:

$$1) x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$2) x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x_{2;3} = -1$$

Жауабы: $x_1 = x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

6-әдіс. Кардано формуласы

Үшінші дәрежелі $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ теңдеуі үшін $x = y - \frac{b}{3a} = y - \frac{1}{3}$ айнымалысын енгізіп аламыз. Әрі қарай бастапқы теңдеудің орнына қойып, $\left(y - \frac{1}{3}\right)^3 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{3}\right) - 1 = 0$ ықшамдаулар жүргізу арқылы

$$y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{16}{27} = 0 \text{ теңдеуін аламыз.}$$

$y^3 + py + q = 0$ үшін Кардано формуласы:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{16}{27} = 0$ теңдеуін шешу үшін Кардано формуласын

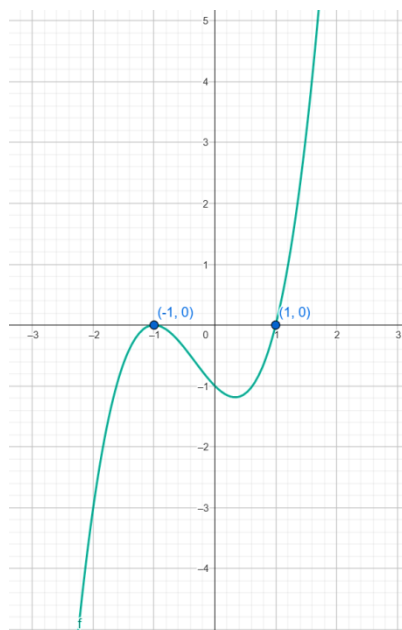
қолданамыз: $y = \sqrt[3]{\frac{8}{27} + \sqrt{\left(\frac{8}{27}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{8}{27} - \sqrt{\left(\frac{8}{27}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^3}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

Табылған y -тің мәнін $x = y - \frac{1}{3}$ орнына қою арқылы x -тің мәндерін табамыз: $y = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

Жауабы: $x = 1$

7-әдіс. Графиктік тәсіл.

Берілген $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$ теңдеуін $y = x^3 + x^2 - x - 1$ функциясы түрінде алып, графигін сызамыз. Графикті онлайн платформалардың көмегімен сыза аламыз[7]:



1-сурет.

Графиктен көріп тұрғанымыздай, функцияның Ox осімен қиылысуы берілген теңдеудің шешімі болады. Бұл нүктелер: $(-1; 0), (1; 0)$. Осы нүктелердің абсциссаларының мәні бастапқы теңдеудің шешімдері болады.

Жауабы: $x = \pm 1$

Нәтижелер мен талдаулар. Үшінші дәрежелі теңдеулерді шешуде Безу теоремасын, Горнер кестесін пайдаланып, теңдеудің дәрежесін төмендету,

көбейткіштерге жіктеу, Виет теоремасы, Кардано формуласы, анықталмаған коэффициенттер, графиктік әдістер қолданылды. Аталған әдістердің әрқайсысының өзіндік артықшылықтары бар.

Горнер кестесі жоғары дәрежелі көпмүшелерді ықшам түрде есептеуге мүмкіндік беретін алгоритмдік әдіс болып табылады. Бұл тәсіл оқушыларға көпмүшені белгілі бір түбірге бөлуді оңайлату арқылы есептеу уақытын қысқартуға жағдай жасайды. Сонымен қатар, Горнер кестесін пайдалану көпмүшенің мәнін жылдам табуға және кейінгі қадамдарда көпмүшені қарапайым формаға келтіріп, түбірлерді оңай анықтауға көмектеседі.

Безу теоремасы көпмүшенің белгілі бір түбір арқылы бөлінетінін анықтауға және оны жеңілдетуге жағдай жасайды. Бұл әдіс оқушыларға жоғары дәрежелі теңдеуді төменгі дәрежелі теңдеуге айналдыру арқылы шешім табу стратегиясын үйретеді. Сонымен қатар, ол бөлінгіштік пен қалдық ұғымдарын нақты меңгеруге көмектеседі.

Көбейткіштерге жіктеу әдісі теңдеулерді факторларға жіктеу арқылы қарапайым түбірлерді оңай табуға мүмкіндік береді. Бұл әдіс оқушыларға стандартты және жиі кездесетін құрылымды теңдеулерді тез шешуге жағдай жасайды. Сонымен қатар, ол оқушылардың көпмүшені түрлендіру және ықшамдау дағдыларын жетілдіреді.

Виет теоремасы түбірлердің қосындысы мен көбейтіндісі арқылы түбірлерді есептеуді жылдамдатады және формулаларға сүйенбей шешу мәдениетін қалыптастырады. Бұл әдіс оқушылардың алгебралық байланыстарды интуитивті түрде түсінуіне мүмкіндік береді. Сондай-ақ, теңдеуді шешудің рационалды жолдарын іздестіруге дағдыландырады.

Анықталмаған коэффициенттер әдісі жоғары дәрежелі теңдеулерді немесе көпмүшелерді шешу кезінде коэффициенттерді табу арқылы теңдеуді жүйелі түрде ықшамдауға мүмкіндік береді. Бұл әдіс логикалық ойлау мен алгебралық түрлендірулерді терең түсінуді талап етеді және осы дағдыларды дамытуға оң ықпал етеді. Сонымен қатар, бұл тәсіл оқушыларға теңдеудің құрылымына талдау жасап, қажетті коэффициенттерді есептеу арқылы күрделі көпмүшелерді оңайлатуға көмектеседі. Әдіс стандартты емес теңдеулер мен жүйелерді шешуде тиімділігімен ерекшеленеді.

Кардано формуласы үшінші дәрежелі (кубтық) теңдеулерді шешудің аналитикалық әдісі болып табылады және күрделі құрылымды теңдеулердің нақты түбірлерін табуға мүмкіндік береді. Бұл әдіс оқушылардың жоғары деңгейдегі алгебралық есептерді шешу дағдыларын дамытып, кубтық теңдеулерді формула арқылы жүйелі түрде шешуді үйретеді. Сонымен қатар, бұл әдіс жоғары математика негіздерін меңгеруде және тарихи тұрғыдан алғанда математикадағы маңызды ашылулардың бірі ретінде оқушылардың танымдық көкжиегін кеңейтуде тиімді құрал болып табылады.

Графиктік тәсіл теңдеудің шешімдерін визуалды түрде талдауға мүмкіндік беріп, оқушылардың кеңістіктік және графикалық ойлау қабілеттерін дамытады. Бұл әдіс шешімдердің жуық мәндерін бағалау және теңдеулердің түбірлерінің орналасуын анықтауда тиімді. Графиктік тәсіл сондай-ақ күрделі теңдеулердің шешімдерін көрнекі көрсету арқылы пәнге деген қызығушылықты арттырады.

Қорытынды. Жоғары дәрежелі теңдеулерді шешу – мектеп математикасы бойынша жаратылыстану бағытындағы сыныптар үшін маңызды және күрделі тақырыптардың бірі болып табылады. Зерттеу барысында талданған әдістердің әрқайсысы оқыту үдерісінде оқушылардың математикалық сауаттылығын арттыруда өзіндік рөл атқаратыны анықталды.

Жоғары дәрежелі теңдеулерді шешудің әртүрлі әдістерін тиімді пайдалану оқушылардың пәнге деген қызығушылығын арттырып қана қоймай, олардың логикалық ойлауын дамытады. Әр әдістің өзіндік ерекшелігі мен қолдану аясы бар. Оқушылар әр әдісті меңгеру арқылы күрделі есептерді шешуде сенімділікке ие болады. Зерттеу нәтижесінде жоғары дәрежелі теңдеулерді шешуде жаңа айнымалы енгізу және көбейткіштерге жіктеу әдістері мектеп курсына жиі қолданылатыны анықталды.

Жалпы алғанда, жоғары дәрежелі теңдеулерді шешу әдістерін жан-жақты және жүйелі түрде меңгеру оқушылардың математикалық ойлау қабілетін дамытумен қатар, оларды күрделі есептерді өз бетінше шешуге бейімдейді және жоғары оқу орындарында математика мен жаратылыстану пәндерін табысты меңгеруге негіз қалайды.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

- 1) Бияров Т.Н., Молдабеков М.М. Элементар математика есептерінің жинағы: оқу құралы – Алматы: Кітап, 1992. – 347 б.
- 2) Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра: справочное пособие – М.: Наука, 1987. – 432 с.
- 3) Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры: Книга для учащихся 7-9 классов средней школы – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
- 4) Сканава М.И. Элементарная математика: повторительный курс. – М.: Наука, 1974. – 592 с.
- 5) Сканава М.И. Полный сборник решений задач для поступающих в вузы. – М.: ООО Издательство «Мир и образование», 2003. – 608 с.
- 6) Титаренко А.М., Роганин А.Н. Математика 500 тестов и задач: для выпускников и абитуриентов – М.: Эксмо, 2007. – 448 с.
- 7) Геогейбра онлайн платформасы: <https://www.geogebra.org/>

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Каскирбаева Нурайым

Научный руководитель: Менлихожаева Саулеш Койлыбаевна,

В статье рассматриваются методы решения одного из наиболее важных и сложных разделов математики старших классов – уравнений высших степеней. Под уравнениями высших степеней понимаются уравнения, в которых степень неизвестной переменной превышает два. Решение таких уравнений требует от учащихся прочных знаний алгебры, а также развитых логических и аналитических навыков мышления. Актуальность исследования заключается в том, что освоение различных методов решения уравнений высших степеней способствует развитию навыков решения задач у школьников и повышает их уверенность при работе со сложными примерами. В статье представлены теоретические и практические результаты исследования, посвященного данной теме.

Ключевые слова: уравнения высших степеней, методы решения, алгебра, разложение на множители, теорема Виета, теорема Безу.

METHODS FOR SOLVING EQUATIONS OF HIGHER DEGREES

Kaskirbayeva Nuraiym

Scientific supervisor: Menlikhozhaeva Saulesh Koilybaykyzy,

This article examines one of the key and most challenging topics in high school mathematics – methods for solving higher-degree equations. Higher-degree equations are those in which the degree of the unknown variable is greater than two. Solving such equations requires students to have a solid knowledge of algebra, as well as well-developed logical and analytical thinking skills. The relevance of the study lies in the fact that mastering various methods for solving higher-degree equations helps students improve their problem-solving skills and increases their confidence while working with complex problems. The article presents theoretical and practical research findings on this topic.

Keywords: higher-degree equations, solution methods, algebra, factorization, Vieta's theorem, Bezout's theorem.

REFERENCES

1. Biyarov T.N., Moldabekov M.M. Collection of elementary mathematics problems: textbook – Almaty: Kitap, 1992. – 347 p.
2. Vavilov V.V., Melnikov I.I., Olekhnik S.N., Pasichenko P.I. Problems in mathematics. Algebra: reference manual – Moscow: Nauka, 1987. – 432 p.
3. Pichurin L.F. Beyond the pages of the algebra textbook: a book for students of grades 7-9 – Moscow: Prosveshchenie, 1990. – 224 p.
4. Skanavi M.I. Elementary mathematics: a review course – Moscow: Nauka, 1974. – 592 p.
5. Skanavi M.I. Complete collection of problem solutions for university applicants – Moscow: Mir iobrazovanie publishing, 2003. – 608 p.
6. Titarenko A.M., Roganin A.N. Mathematics: 500 Tests and problems for graduates and applicants – Moscow: Eksmo, 2007. – 448 p.
7. GeoGebra online platform: <https://www.geogebra.org/>