

ОӘЖ 372.851

БАНАХ-ТАРСКИЙ ПАРАДОКСЫ: КОНТРИНТУИТИВТИ МАТЕМАТИКАЛЫҚ ФЕНОМЕН

Баймуханов Архат Салибайұлы

*докторант, физика-математика факультеті, І.Жансүгіров атындағы
Жетісу Университеті, Талдықорған қ., Қазақстан*

Банах-Тарский парадоксы - математикалық шындықтың бізге таныс түсініктеріне қайшы келетін ерекше мысал. Бұл парадокс жиындар теориясы мен өлшеу теориясының аксиомаларына негізделген, Евклид кеңістігінде шексіздік пен симметрияның ерекшеліктерін зерттеуге мүмкіндік береді. Мақала парадокстың негізгі тұжырымдамасын, оның дәлелін, және қазіргі математикадағы ролін егжей-тегжейлі қарастырады. Сонымен қатар, оның қолданбалы ғылымдар мен философиядағы әсері талқыланады.

Кілт сөздер: Банах-Тарский, жиын теориясы, өлшеу теориясы, аксиоматика, математика, парадокс, кеңістік, шексіздік, симметрия, Евклид геометриясы.

Кіріспе. Банах-Тарский парадоксы математикалық тұжырымдар әлемінде ерекше орын алады. Бұл парадокс бір шарды шектеулі саны шексіз шағын бөліктерге бөліп, кейіннен оларды басқа шарға жинақтауға болатынын көрсетеді. Бұл нәтиже күнделікті өмірден алған интуициямызға қайшы келеді, бірақ математикалық логика тұрғысынан толық негізделген. Бұл мақалада парадокстың теориялық негіздері, дәлелдері, қолданбалары және философиялық мәні қарастырылады.

Тарихи негіздер. 1924 жылы Стефан Банах пен Альфред Тарский «Fundamenta Mathematicae» журналында парадоксты жария етті [1]. Олардың жұмысы Джордж Кантордың жиын теориясындағы шексіздік идеяларын әрі қарай дамытуға негізделді [2]. Джон фон Нейман мен Феликс Хаусдорфтың зерттеулері де осы нәтижені нығайта түсті [3].

Парадокстың ашылуы математикада көптеген пікірталастар туғызды. Оның интуицияға қайшылығы мен физикалық әлемге қатысы туралы сұрақтар жиі қойылды. Бұл нәтиже математикадағы шексіз жиындармен жұмыс істеу кезінде қолданылатын әдістердің шекараларын кеңейтті.

Математикалық негіздер. Жиындар теориясы парадокстың негізін құрайды. Джордж Кантордың шексіз жиындар туралы зерттеулері жиындардың

өлшемсіздігі мен аксиоматиканы зерттеуге мүмкіндік берді. Банах-Тарский парадоксында мына қағидалар қолданылады [2]:

Жиындардың бөлінгіштігі (Partition Principle): Шарды шектеулі бөліктерге бөлгенде, әрбір бөлік қайта құрастырылған кезде басқа геометриялық объектіні құра алады.

Изометриялық түрлендірулер: Евклид кеңістігінде белгілі бір түрлендірулер арқылы объектілердің геометриялық қасиеттерін сақтай отырып, өзгертуге болады.

Шексіздік: Шексіз жиындармен жұмыс кезінде шекаралық өлшемдер жойылып, дәстүрлі интуицияға сәйкес келмейтін нәтижелер пайда болады.

Өлшеу теориясы Евклид кеңістігінің объектілерін өлшеу үшін қолданылады. Банах-Тарский парадоксы дәстүрлі өлшеу әдістерінен ауытқиды, өйткені оның нәтижелері стандартты өлшемдерге бағынбайтын жиындармен жұмыс істеуді талап етеді [4].

Дәлелдеу негіздері.

Банах-Тарский парадоксының дәлелі келесі түрде беріледі:

Декомпозиция: Шарды A_1, A_2, \dots, A_n бөліктеріне бөлу.

Изометриялық түрлендіру: Әрбір бөлікті Евклид кеңістігіндегі трансформациялар арқылы қайта құру.

Құрастыру: Бөлшектерден жаңа шарды жасау.

Бұл дәлелдеу еркін топтар мен олардың қасиеттерін қолдануды талап етеді.

Парадокстың мазмұны мен нәтижелері.

Шексіздік және интуиция. Банах-Тарский парадоксы шексіз жиындар мен Евклид кеңістігі арасындағы байланыстарды зерттеуге мүмкіндік береді [2]. Ол бір шарды өлшемін өзгертпей, екі шарға айналдыруға болатынын дәлелдейді. Бұл нәтиже жиі «жоқтан бар жасау» ретінде сипатталады [6].

Өлшемсіз жиындар. Өлшемсіз жиындар парадокстың негізгі аспектісі болып табылады. Бұл жиындар стандартты өлшеу құралдарына сәйкес келмейді және дәстүрлі геометриялық интуицияны бұзады [5].

Еркін топтар. Еркін топтар Банах-Тарский парадоксының математикалық негізін құрайды. Олар объектілердің трансформацияларын зерттеу үшін қолданылады. Еркін топтардың қасиеттері дәстүрлі аксиомаларға қарама-қайшы келетін нәтижелер береді.

Философиялық және қолданбалы маңызы.

Математикалық философия. Банах-Тарский парадоксы математикалық аксиомалар мен интуиция арасындағы айырмашылықты көрсетеді. Ол математиканың шындықты бейнелеудің абстрактілі әдісі екенін дәлелдейді.

Ақпараттық технологиялар. Парадокстың алгоритмдер мен деректер құрылымдарында қолданылуы оның маңыздылығын көрсетеді. Ол деректерді қысу, шифрлау және өңдеу әдістерін жетілдіру үшін қолданылады.

Физика және кванттық теория. Парадокс Евклид кеңістігінің кванттық физика заңдарымен үйлесімділігін зерттеуге мүмкіндік береді. Ол шексіздік пен симметрияның физикалық жүйелерде қалай жұмыс істейтінін түсіндіруге көмектеседі.

Парадоксқа сын және пікірталастар.

Интуицияға қайшы келуі

Банах-Тарский парадоксы шындыққа қарама-қайшы болып көрінеді. Бұл көптеген философтарды оны математикадан тыс салаларда қолдану туралы күмән тудырды.

Физикалық шектеулер

Кейбір ғалымдар парадокстың шындыққа сәйкес келмейтінін және тек таза математикада қолданылуы керек екенін айтады.

Аксиоматика мәселелері

Парадокс ZFC аксиомалар жиынтығына сүйенеді. Бұл аксиомаларды қайта қарау немесе толықтыру қажеттілігі туралы сұрақтар туындады [7].

Қорытындылар.

Банах-Тарский парадоксы математиканың интуициядан тыс нәтижелерге қол жеткізуге қабілеттілігін көрсетеді. Ол шексіздік, симметрия және өлшеу теориясы туралы түсініктерімізді тереңдетеді. Бұл нәтиже математикалық зерттеулердің шекараларын кеңейтумен қатар, оның философиялық және қолданбалы мәнін көрсетеді.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Банах С., Тарский А. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes // Fundamenta Mathematicae. – 1924. – Vol. 6. – P. 244–277.
2. Вагон С. Парадокс Банаха-Тарского. – Кембридж: Cambridge University Press, 1993.
3. Нейман фон Дж. Zur allgemeinen Theorie des Maßes // Fundamenta Mathematicae. – 1929.
4. Грэтцер Г. Общая теория решеток. – Берлин: Springer, 2002.
5. Халмос П.Р. Теория меры. – Берлин: Springer, 1950.
6. Канамори А. Высшая бесконечность: большие кардиналы в теории множеств с самого начала. – Берлин: Springer, 2003.
7. Мур Г.Х. Аксиома выбора Цермело: ее происхождение, развитие и влияние. – Нью-Йорк: Dover Publications, 2013.

ПАРАДОКС БАНАХА - ТАРСКОГО: КОНТРИНТУИТИВНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕНОМЕН

Баймуханов Архат Салибайұлы

Парадокс Банаха - Тарского — это математический результат, основанный на аксиоматической теории множеств и теории меры, который вызывает трудности для интуитивного восприятия. В данной статье рассматриваются основные понятия, связанные с парадоксом, его доказательство и роль в современной математике. Кроме того, анализируется влияние парадокса на развитие прикладных наук, таких как информатика и физика, а также его философские последствия.

Ключевые слова: Банах-Тарский, теория множеств, теория мер, аксиоматика, математика, парадокс, пространство, бесконечность, симметрия, евклидова геометрия.

BANACH-TARSKI PARADOX: A COUNTERINTUITIVE MATHEMATICAL PHENOMENON

Baymukhanov Arkhat Salibayuly

The Banach-Tarski paradox is a mathematical result based on set theory and measure theory that defies intuitive understanding. This article explores the paradox's foundational concepts, its proofs, and its role in modern mathematics. Additionally, its implications in applied sciences and philosophy are examined.

Keywords: Banach-Tarski, set theory, measure theory, axiomatics, mathematics, paradox, space, infinity, symmetry, Euclidean geometry.

REFERENCES

1. Banach S., Tarski A. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes // Fundamenta Mathematicae. – 1924. – Vol. 6. – P. 244–277.
2. Wagon S. The Banach-Tarski Paradox. – Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
3. Neumann J. von. Zur allgemeinen Theorie des Maßes // Fundamenta Mathematicae. – 1929.
4. Grätzer G. General Lattice Theory. – Berlin: Springer, 2002.

5. Halmos P.R. Measure Theory. – Berlin: Springer, 1950.

6. Kanamori A. The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings. – Berlin: Springer, 2003.

7. Moore G.H. Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence. – New York: Dover Publications, 2013.