ОӘЖ 373.5:514.1

ЖОҒАРЫ СЫНЫП ОҚУШЫЛАРЫНА СТЕРЕОМЕТРИЯНЫ ОҚЫТУДЫҢ ТИІМДІ ӘДІСТЕРІ

Ердеш Балдинар Бақытханқызы

1-курс магистрант, математика және физика кафедрасы,
Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті
Алматы қ., Қазақстан

Мақалада орта мектеп оқушыларына стереометрияны оқытудың тиімді әдістері қарастырылады. Стереометрия кеңістіктік ойлау мен логикалық талдаудың дамуына ықпал ететін геометрияның маңызды бөлімі болып табылады. Көрнекі құралдарды, цифрлық технологияларды, бағдарламалық қамтамасыз етуді, сондай-ақ жобалық оқыту мен топтық жұмыс әдістерін пайдалануды қоса алғанда, оқытудың дәстүрлі және заманауи тәсілдерін біріктіруге баса назар аударылады. Фигураларды визуализациялауға, қималармен жұмыс істеуге, көлемдер мен аудандарды есептеуге, сондай-ақ теорияны практикада қолдануға ықпал ететін практикалық есептерге ерекше назар аударылады. Интерактивті тәсілдер мен жекелендірілген тапсырмалар оқушылардың пәнге деген қызығушылығын арттыруға, сондай-ақ нақты жағдайларда күрделі мәселелерді шешуге қажетті дағдыларды дамытуға көмектеседі.

Кілт сөздер: геометрия, стереометрия, үш өлшемді кеңістік, векторлық – координаталық әдіс, координаталық жүйе.

1. Кіріспе. Мектеп оқушыларының кеңістіктік ойлауын дамытуға геометрияның бір саласы болып табылатын кеңістіктегі фигуралардың қасиеттерін зерттейтін ғылым стереометрия ықпал етеді. Оқушылардың едәуір бөлігіне көлемді фигураларды салу әдістерін немесе берілген фигуралардың үш өлшемді кеңістікте қалай қиылысатынын түсіну қиын. Бұл пән тек теориялық білімді ғана емес, сонымен қатар күрделі практикалық есептерді шешуге қажетті дағдыларды да қалыптастырады. Мақалада стереометрияны оқытудың тиімді әдістері мен қазіргі заманғы тәсілдер талқыланады. Тиімді оқыту әдістерін қолдану оқушылардың тақырыпты терең түсініп, қызығушылықпен оқуына жағдай жасайды. Стереометрияны зерттеуді қиындататын себептердің бірі сызбаларды дұрыс әрі анық салу болып табылады. 10-сыныпта планиметрия курсынан кейін дәптерге кеңістіктік фигураның дұрыс сызбасын құрастыру қиын. Оқушы кейде қателерді байқамайды, мәселені дұрыс шешу үшін фигураның кеңістіктегі орнын айқындауға мән бермейді, мұғаліммен есептің сызбасын талқыламайды, бірақ бірден оның құрылысына кіріседі, сызбаны орындау техникасына мән бермейді.

Стереометрияның пайда болуына және зерттелуіне тоқтала кетейік. Ежелгі Египеттен бастау алатын үш өлшемді геометрияның негізгі бөліктері болып табылатын стереометрия пирамидалардан бастау алады. Жеті кереметтің бірі болып саналатын «Египет пирамадилары» кеңістік фигура болып табылады. Демек, кеңістіктегі фигураларды салу, олардың қабырғалары арасында бұрыштарды табу және зерттеу ежелден келе жатыр. Ал қазіргі біздің оқулықтарымызда қолданып жүрген стереометрия аксиомалары мен принциптері және кеңістіктік фигуралардың көлемін табу Евклидтің «Негіздер» атты еңбегінен алынған. Міне, осы ақпараттардан кейін стереометрияны маңызды геометриялық фигуралардың ауданы және көлемін табудан бөлек, әртүрлі инженерлік және архитектуралық тапсырмаларда қолдана бастады. Орта ғасырларда Жан Даламбер, Рене Декарт, Леонардо да Винчи, Джероламо Кардано, Альбрехт Дюрер сияқты ғалымдар координаттар жүйесі арқылы стереометрия элементтерін нақты орындарын табуды және осы арқылы күрделі есептерді шеше бастады.[1] Осы зерттеулердің нәтижесі ретінде күрделі құрылысты «Әулие Петр күмбезі». (1-сурет)

1-сурет.

Қазіргі заманғы стереометрияның зерттелуіне келейік, XIX ғасырда математик Жорж Лиувилле үш өлшемді фигуралардың ауданын және көлемін табуда интергралдау әдісін ойдап тапты. Бұл әдіс күрделі фигураларды есептеуге мүмкіндік берді. Ұлы математиктер стереометрияға өте бағалы зерттеулер жасап кетті. Олардың ашулары мен аксиома, теоремалары қазіргі күнге дейін қолданылып келеді. Алайда, бұл жалпы стереометрияны оқып үйренуде қазіргі 10-11 сынып оқушылары үшін тудыратын мәселелер мен қиындықтарды шешуге арнайы, тиімді әдістерді ойлап табуға тоқтау қоймау керек. Әр заман балаларының қабылдау түрлері мен ақпараттары өзгеріп отыруына байланысты тиімді әдістерді ойлап табу қажеттіліктен туады. Бұл мақалада ұсынатын тиімді әдістер: векторлық-координаталық әдіс[2], көрнекі құралдар әдісі, геометриялық фигуралардың қасиеттерін пайдалану әдісі.

2. Зерттеу әдістері. Жоғары сынып оқушыларына стереометрия курсын оқытуда қандай қиындықтар келетінін айқындап алдық, енді соған сәйкес тиімді әдістерді қарастырып көрейік.

Векторлық-координаталық әдіс – үш өлшемді кеңістіктегі геометриялық есептерді шешу және талдау үшін векторлар мен олардың координаталарын пайдалануды көздейтін математикалық тәсіл. Бұл әдісті қолдану үшін алдымен есеп қойылған кеңістікке координаталар жүйесін енгіземіз[3]. Біз әдетте кеңістіктің енін, биіктігін және тереңдігін білдіретін x, y және z осьтері бар оң жақ координаталар жүйесін пайдаланамыз. Одан әрі есептердегі нүктелерді, түзулерді және жазықтықтарды векторлардың көмегімен бейнелейміз. Мысалы, нүктені басынан нүктенің координатасына дейінгі вектор ретінде, түзуді түзудің бағытын көрсететін вектор ретінде, ал жазықтықты жазықтыққа нормаль вектор ретінде көрсетуге болады.

Кеңістікте O_{xyz} координаталар жүйесін енгізген кезден бастап оның әрбір нүктесіне (x;y;z) сандар үштігі сәйкестікке қойылады.

1. Ұштары $A(x_1; y_1; z_1)$ және $B(x_2; y_2; z_2)$ нүктелерінде болатын AB кесіндісінің қақ ортасы $C(x; y; z)$ нүктесінің координаталары келесі формула бойынша есептеледі [4]

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right) \quad (1)$$

2. $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесінен $ax + by + cz + d = 0$ теңдеуімен берілген α жазықтығына дейінгі қашықтық [5]

$$\rho(M_0; \alpha) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad (2)$$

3. Егер түзудің $\vec{c}\{k; l; m\}$ бағыттаушы векторының координаталары берілген болса, ал жазықтықтың нормаль векторы $\vec{n}\{a; b; c\}$ болса, онда түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

$$sin\varphi = \frac{|ka+lb+mc|}{\sqrt{k^2+l^2+m^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad (3)$$

формуласынан табылады. [6]

4. Кеңістіктегі екі түзудің арасындағы γ бұрышты олардың $\overrightarrow{c_1}\{k_1; l_1; m_1\}$, $\overrightarrow{c_2}\{k_2; l_2; m_2\}$ бағыттаушы векторларының скаляр көбейтіндісін қолданып табуға болады [4]

$$cos\gamma = \frac{|k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2|}{\sqrt{k_1^2 + l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{k_2^2 + l_2^2 + m_2^2}} \tag{4}$$

5. Жазықтықтардың арасындағы бұрышты олардың нормаль векторларының арасындағы бұрыш арқылы мынадай формуламен есептеуге болады

$$cos\theta = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \tag{5}$$

Көрнекі құралдар әдісі дегеніміз –интерактивті тақта, макеттер және визуализациялау құралдарын пайдалыну арқылы өту тәсілі. Соңғы екі онжылдықта компьютерлік технологиялар адам қызметінің барлық салаларында қолданылуда. Білім беру процесінде де өз орнын табуда. Компьютерлерді және инновациялық әдістерді мектептегі білім беруде қолданудың орындылығы мен тиімділігі айқын. Олар стереометрия сабақтарында кеңістіктік денелер: пирамидалар, параллелепипедтер, цилиндрлер, конустарды 3Д өлшемде анық көре алуымызға болады. Енді сабақтарда интерактивті тақталарды қолдануға болады, оның экранында геометриялық денелер үш өлшемді түрде бейнеленеді, оларды үлкейтуге, жылжытуға, түрлі-түсті етіп бейнелеуге болады. Геометрия сабақтарында компьютерлік технологияларды қолданудың арнайы әдістемелері әзірленіп қойған, жалпы алғанда, оларды қолдану оқу орындарында геометрияны сапалы және терең меңгеруге ықпал етеді.

Геометриялық фигуралардың қасиеттерін пайдалану әдісі – стереометрияны оқытуда кеңінен қолданылатын тиімді тәсілдердің бірі. Бұл әдіс оқушыларға фигуралардың негізгі қасиеттерін түсінуге және оларды есептерді шешу барысында қолдануға мүмкіндік береді. Геометриялық фигуралар белгілі бір қасиеттерге ие: олардың қабырғаларының ұзындығы, бұрыштары, аудандары мен көлемдері арасында байланыстар бар. Оқушылар осы қасиеттерді анықтап, есептерді шешу үшін тиімді пайдалана алады.

3. Нәтиже. Тиімді тәсілдердің іс жүзінде көрсету үшін мысалдар қарастырайық:

1-мысал: $x - 3y - 2z + 5 = 0$ және $-2x + y - 4z - 1 = 0$ теңдеулерімен берілген жазықтықтардың арасындағы бұрыштың косинусын табыңыз.

Шешуі: Берілген жазықтықтардың нормаль векторларының координаталары $\overrightarrow{n_1}\{1;-3;-2\}$ және $\overrightarrow{n_2}\{-2;1;-4\}$ болғандықтан, (5) формуласы бойынша

$$cos\theta = \frac{|1\cdot(-2)+(-3)\cdot 1+(-2)\cdot(-4)|}{\sqrt{1+9+4}\cdot\sqrt{4+1+16}} = \frac{|-2-3+8|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}} = \frac{3}{7\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{14}$$

Жауабы: $cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{14}$

2-мысал. $3x+2y+4x+11=0$ және $9x+6y+12z-5=0$ теңдеулерімен берілген жазықтықтардың арақашықтығын есептеңіз.

Шешуі: Екінші теңдеудің екі жағын да 3-ке бөлейік, сонда $3x+2y+4z-\frac{5}{3}=0$ және $3x+2y+4x+11=0$ жазықтықтары параллель болатынын көреміз. Екінші жазықтықтан кез-келген бір нүктені таңдаймыз, айталық $x=y=0$ болса, онда

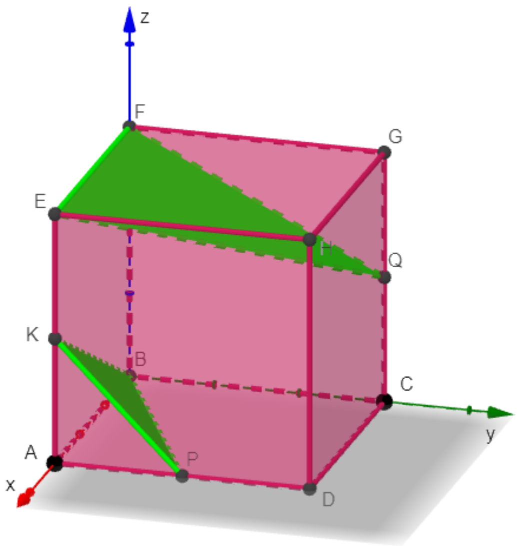
$z=\frac{5}{12}$ екендігі шығады. Солай болса, $M\left(0;0;\frac{5}{12}\right)$ нүктесінен $3x+2y+4x+11=0$ жазықтығына дейінгі қашықтықты (2) формуласы бойынша есептейміз:

$$\rho = \frac{\left|3\cdot 0+2\cdot 0+4\cdot\frac{5}{12}+11\right|}{\sqrt{9+4+16}} = \frac{38}{3\sqrt{29}} = \frac{38\sqrt{29}}{87}$$

Жауабы: $\frac{38\sqrt{29}}{87}$

3-мысал. Қыры m-ге тең болатын ABCDEFGH кубында AE, AD және CG қырларының орталары сәйкесінше K,P және Q нүктелері болып табылады. KPB және EQF жазықтықтарының арасындағы бұрышты табыңыз.

Шешуі: Координаталық жүйені суретте көрсетілгендей енгіземіз.



B(0;0;0), E(m;0;m), F(0;0;m), A(m;0;0), D(m;m;0), C(0;m;0), G(0;m;m) нүктелерінің координаталарын жазамыз. Ал K, P және Q нүктелерінің координаталарын (1) формуласы бойынша табамыз, сонда K(m;0;$\frac{m}{2}$), P(m;$\frac{m}{2}$;0) ал Q(0;m;$\frac{m}{2}$).

KPB жазықтығының теңдеуін жазамыз:

$$\begin{cases} a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 0+d=0 \\ a\cdot m+b\cdot 0+c\cdot \dfrac{m}{2}+d=0 \\ a\cdot m+b\cdot \dfrac{m}{2}+c\cdot 0+d=0 \end{cases} \begin{cases} d=0 \\ 2a+c=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \begin{cases} d=0 \\ b=c \\ a=-\dfrac{1}{2}c \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}cx+cy+cz=0$$

$$x-2y-2z=0$$

EQF жазықтығының теңдеуін жазамыз:

$$\begin{cases} a\cdot m+b\cdot 0+c\cdot m+d=0 \\ a\cdot 0+b\cdot m+c\cdot \dfrac{m}{2}+d=0 \\ a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot m+d=0 \end{cases} \begin{cases} a+c=\dfrac{1}{m} \\ 2b+c=\dfrac{2}{m} \\ c=\dfrac{1}{m} \end{cases} \begin{cases} a=0 \\ b=\dfrac{1}{2m} \\ c=\dfrac{1}{m} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2m}y+\frac{1}{m}z=1$$

$$y+2z-2m=0$$

Жазықтықтардың нормаль векторлары $\overrightarrow{n_1}\{1;-2;-2\}$, $\overrightarrow{n_2}\{0;1;2\}$ болғандықтан, (5) формуласы бойынша:

$$cos\theta=\frac{|1\cdot 0+(-2)\cdot 1+(-2)\cdot 2|}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{0+1+4}}=\frac{|0-2-4|}{3\sqrt{5}}=\frac{6}{3\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

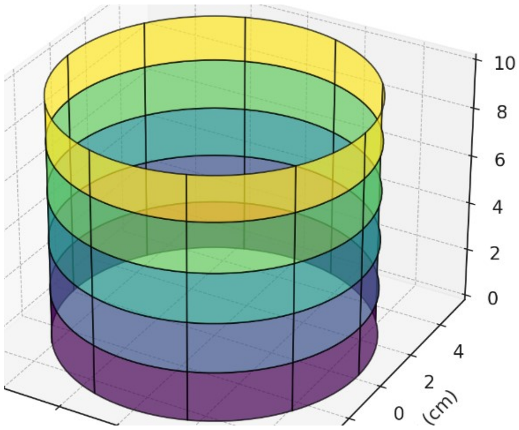
екендігі шығады, сондықтан да $\theta=arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Жауабы: $arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Нәтижесінде оқушылардың жоғарыда келтірілген күрделі есептерді векторлық-координаталық әдісті және көрнекілік әдісті қолданудың арқасында өте тез, әрі тиімді шығарғанын көруге болады. Көрнекі құралдар GeoGebra, Cabri 3D сияқты бағдарламаларды пайдалану. Көрнекі құралдарды қолданудың артықшылықтары

- Оқушылардың пәнге деген қызығушылығын арттырады;
- Тапсырмаларды тезірек әрі түсінікті орындауға көмектеседі;
- Кеңістіктік ойлау және қиялдау қабілетін жетілдіреді;
- Күрделі теориялық материалды жеңіл әрі нақты жеткізеді.

Геометриялық фигуралардың қасиеттерін пайдалану әдісін кез келген кеңістіктегі фигураның көлемі немесе ауданы және бұрыштарына қолданатынымыз анық, соның ішінде цилиндр ауданын табуға мысал келтірейік: Радиусы 5 см, биіктігі 10 см болатын цилиндрдің көлемін табу керек.



2-сурет.

Шешуі: 2-суретте цилиндр берілген біз оған қарап, цилиндір дегеніміз дөңгелектерден құралғанын түсінеміз, демек цилиндр көлемін табу үшін дөңгелек ауданын қолданамыз және оны еселеу арқылы яғни биіктігіне көбейту арқылы $V = S_{\text{дөңгелек}} \cdot h$ көлемінің формуласын аламыз.

$$S_{\text{дөңгелек}} = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 5^2 = 78{,}5 \text{ см}^2,\ V = 78{,}5 \cdot 10 = 785 \text{ см}^3$$

Жауабы: $V = 785 \text{ см}^3$

Қорытындылай келе, Жоғары сынып оқушыларына стереометрияны оқытуда дәстүрлі және заманауи әдістерді үйлестіру – оқушылардың пәнге қызығушылығын арттырудың және олардың білімін тереңдетудің ең тиімді жолы. Көрнекілік құралдарды, цифрлық технологияларды және интерактивті оқыту әдістерін қолдану оқушылардың кеңістіктік ойлауын дамытуға, практикалық есептерді шешу дағдыларын жетілдіруге мүмкіндік береді. Геометриялық фигуралардың қасиеттерін пайдалану әдісі оқушылардың кеңістіктік фигураларды тереңірек түсінуіне және есептерді тиімді шешуіне ықпал етеді. Әдістің тиімділігі дұрыс түсіндіру, көрнекі құралдармен жұмыс және практикалық тапсырмалар арқылы артады. Көрнекі құралдар әдісі стереометрияны оқытуда оқушылардың материалды тереңірек түсінуіне және есептерді оңай шешуіне жағдай жасайды. Бұл әдістер оқушылардың теориялық білімін нақты өмірде қолдануға үйретудің маңызды құралы болып табылады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Гусев А.А. История математики. – СПБ.2000
2. Смирнов В.А., Тұяқов Е.А. Геометрия: 10-сынып. – Мектеп баспасы, 2019
3. Смирнов В.А., Тұяқов Е.А. Геометрия: 11-сынып. – Мектеп баспасы, 2020

4. Аширбаев Н.Қ., Слайхан М.Е. Стереометриялық есептерді векторлық әдіспен шешу // Математика, физика, информатика журналы 2020. - Том 23, №2(68).
5. Аппақ Г.Е. Векторлық әдісті есептер шығаруда қолдану // Е.А. Бөкетов атындағы ҚарМУ жаршысы.   2021. - №4 (132).
6. Понтрягин Л.С. Метод координат. Москва, Наука, 1987.
7. Якушина Е.В. Об изучении векторов в планиметрии и стереометрии // Математика в школе.- 1996, №3.
8. Геогебра бағдарламасы, GeoGebra.org.

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ СТАРШЕКЛАССНИКОВ

Ердеш Балдинар Бақытханқызы

В статье рассматриваются эффективные методы преподавания стереометрии старшеклассникам. Стереометрия является важным разделом геометрии, способствующим развитию пространственного мышления и логического анализа. Основное внимание уделено сочетанию традиционных и современных подходов в обучении, включая использование наглядных пособий, цифровых технологий, программного обеспеченя, а также методов проектного обучения и групповой работы. Отдельное внимание уделено визуализации фигур, работе с сечениями, расчету объемов и площадей, а также практическим задачам, способствующим применению теории на практике. Интерактивные подходы и индивидуализированные задания помогают повысить интерес учащихся к предмету, а также развить навыки, необходимые для решения сложных задач в реальных условиях.

Ключевые слова: геометрия, стереометрия, трехмерное пространство, векторно – координатный метод, координатная система.

EFFECTIVE METHODS OF TEACHING STEREOMETRY TO SECONDARY SCHOOL STUDENTS

Erdesh B.B.

The article deals with effective methods of teaching stereometry to high school students. Stereometry is an important section of geometry, contributing to the development of spatial thinking and logical analysis. The main attention is paid to the combination of traditional and modern approaches in teaching, including the use of *visual aids, digital technologies, software, as well as methods of project-based learning and group work. Special attention is paid to visualization of figures, working with sections, calculation of volumes and areas, as well as practical tasks that facilitate the application of theory in practice. Interactive approaches and individualized tasks help to increase students' interest in the subject, as well as to develop the skills necessary to solve complex problems in real-life conditions.*

Keywords: geometry, stereometry, three-dimensional space, vector-coordinate method, coordinate system.

REFERENCES

1. Gusev A.A. History of mathematics. - SPB. 2000
2. Smirnov V.A., Tuyakov E.A. Geometry: 10th grade. - School publishing house, 2019
3. Smirnov V.A., Tuyakov E.A. Geometry: Grade 11. - School publishing house, 2020
4. Ashirbaev N.K., Slaikhan M.E. Solving stereometric problems using the vector method // Mathematics, Physics, Informatics Journal. - 2020. – Vol.23, No. 2(68).
5. Apak G.E. Application of the vector method in calculations // E.A. Boketov Karsmu State University Bulletin. - 2021. - No. 4 (132).
6. Pontryagin LS. Method coordinate. Moscow, Nauka, 1987.
7. Yakushina E.V. On the study of vectors in planimetry and stereometry // Mathematics in school. - 1996, No. 3.
8. GeoGebra program, GeoGebra.org.