ӘОЖ 511.3

ДИОФАНТТЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ ӘДІСТЕРІН ЖҮЙЕЛЕУ ЖӘНЕ ОҚЫТУДА ҚОЛДАНУ

Өміртай Жасұлан Үсенұлы
магистрант, Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ. Математика және механика факультеті, Астана қ., Қазақстан

Ғылыми жетекші: Байсалов Е.Р.

Бұл мақалада диофанттық теңдеулерді шешу әдістерін жүйелеу және оларды мектеп математикасын оқыту процесінде қолдану мәселелері қарастырылады. Диофанттық теңдеулердің негізгі түрлері сипатталып, оларды шешудің тиімді тәсілдері, атап айтқанда жай көбейткіштерге жіктеу әдісі, модульдік арифметика, Евклид алгоритмі және математикалық индукция әдістері талданады. Жұмыста әрбір әдіске сәйкес теориялық негіздер беріліп, оларды қолдануға арналған есептер жүйесі ұсынылған. Сонымен қатар, ұқсас типтегі есептерді бір әдіспен шешу арқылы оқушылардың логикалық ойлау қабілетін дамыту мүмкіндіктері көрсетілген. Зерттеу нәтижелері диофанттық теңдеулер элементтерін мектеп курсында тиімді қолдануға болатынын және олардың оқушылардың математикалық дайындығын арттыруда маңызды рөл атқаратынын дәлелдейді.

Кілт сөздері: диофанттық теңдеулер, сан теориясы, оқыту әдістемесі, модульдік арифметика, Евклид алгоритмі, математикалық индукция.

1. Диофанттық теңдеулерді шешу әдістерінің теориялық негіздері

1.1 Диофанттық теңдеулер туралы жалпы түсінік

Диофанттық теңдеулер деп айнымалыларының мәндері бүтін сандар жиынында қарастырылатын теңдеулерді айтады. Бұл теңдеулер ежелгі математикадан бастау алады және сан теориясының негізгі тарауларының бірі болып табылады. Диофанттық теңдеулердің басты ерекшелігі — теңдеуді қанағаттандыратын барлық нақты мәндер емес, тек бүтін мәндер ізделінеді.

Жалпы түрде диофанттық теңдеу

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

түрінде беріледі, мұндағы f— бүтін коэффициентті өрнек, ал $x_1, x_2, \dots, x_n$— бүтін мән қабылдайтын айнымалылар.

Диофанттық теңдеулерді зерттеу барысында екі негізгі сұрақ қарастырылады:

1. теңдеудің бүтін шешімі бар ма;

2. егер бар болса, барлық шешімдерін қалай табуға болады.

Осыған байланысты диофанттық теңдеулерді шешудің әртүрлі әдістері қалыптасқан. Олардың ішінде мектеп математикасында түсіндіруге қолайлы әдістер ретінде жіктеу, модульдік арифметика, Евклид алгоритмі, математикалық индукция және түрлендіру әдістерін атап өтуге болады.

1.2 Диофанттық теңдеулердің жіктелуі

Диофанттық теңдеулер құрылымы мен шешу тәсілдеріне қарай бірнеше түрге бөлінеді.

1) Сызықтық диофанттық теңдеулер

$$ax + by = c,$$

мұндағы $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Бұл — ең қарапайым және мектеп курсында енгізуге ең ыңғайлы түрі.

2) Квадраттық диофанттық теңдеулер

$$x^2 - Dy^2 = 1.$$

Мұндай теңдеулердің ішінде Пелль теңдеуі ерекше орын алады.

3) Рационал өрнектер арқылы берілетін теңдеулер

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}.$$

Мұндай теңдеулер көбінесе түрлендіру және жіктеу әдісімен шешіледі.

4) Көп айнымалысы бар диофанттық теңдеулер

Мысалы:

$$x + y + z = n.$$

5) Параметрлі диофанттық теңдеулер

Мұнда шешім белгілі бір параметрге тәуелді болады.

Бұл жіктеу шешу әдістерін реттеп беруге және оқытуда жүйелі түрде қолдануға мүмкіндік береді.

1.3 Жай көбейткіштерге жіктеу әдісі

Диофанттық теңдеулерді шешудің маңызды тәсілдерінің бірі — теңдеуді көбейтінді түріне келтіру. Егер берілген теңдеуді

$$f_1(x_1, \dots, x_n) \cdot f_2(x_1, \dots, x_n) \cdots f_k(x_1, \dots, x_n) = a$$

түрінде жазуға болса, онда aсанының бөлгіштерін қарастыру арқылы шешімдер табылады.

Бұл әдістің негізі мынада: егер бірнеше өрнектің көбейтіндісі белгілі бір бүтін санға тең болса, онда сол санның барлық мүмкін жіктелулері қарастырылады. Әрбір жіктелу айнымалылар үшін жеке-жеке теңдеулер жүйесін береді.

Егер

$$f_1(x_1, \dots, x_n) \cdot f_2(x_1, \dots, x_n) = a$$

болса, онда a-ның барлық бөлгіштері үшін

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = d, f_2(x_1, \dots, x_n) = \frac{a}{d}$$

түріндегі жүйелер алынады.

Бұл әдіс әсіресе

$(x - a)(y - b) = c$

түріне келетін теңдеулер үшін өте тиімді.

1.4 Модульдік арифметика әдісі

Модульдік арифметика әдісі диофанттық теңдеулердің шешімінің бар-жоғын тексеруде жиі қолданылады. Бұл әдісте теңдеу белгілі бір модуль бойынша қарастырылады. Кейде теңдеудің бүтін шешімі болмайтынын дәл осы тәсіл арқылы оңай дәлелдеуге болады.

Мысалы, квадраттардың қалдықтары белгілі бір модуль бойынша шектеулі болады. Мәселен, кез келген бүтін санның квадраты 4модулі бойынша тек 0немесе 1қалдық бере алады. Сол сияқты 8модулі бойынша квадраттардың қалдықтары $0,1,4$мәндерінің бірі болады.

Егер теңдеудің бір жағы берілген модуль бойынша бір мүмкін қалдықтар жиынын қабылдап, ал екінші жағы оған кірмейтін қалдық берсе, онда теңдеудің бүтін шешімі жоқ деп қорытынды жасауға болады.

Бұл әдіс әсіресе шешімі жоқ теңдеулерді дәлелдеуде өте ыңғайлы.

1.5 Евклид алгоритмі және сызықтық диофанттық теңдеулер

Сызықтық диофанттық теңдеудің жалпы түрі:

$$_{\text{э}}ax + by = c.$$

Мұндай теңдеудің бүтін шешімі болуы үшін және тек қана сол жағдайда

$$\gcd(a, b) \mid c$$

шарты орындалуы қажет.

Егер $d = \gcd(a, b)$және $d \mid c$болса, онда теңдеудің кемінде бір бүтін шешімі бар. Сол шешімді тапқаннан кейін барлық шешімдер мына формуламен жазылады:

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, y = y_0 - \frac{a}{d}t, t \in \mathbb{Z}.$$

Бұл әдіс мектеп оқушыларына бөлінгіштік, ЕҮОБ, теңдеулер тақырыптарымен байланыстыра отырып түсіндіруге өте қолайлы.

1.6 Математикалық индукция әдісі

Математикалық индукция — натурал сандарға тәуелді тұжырымдарды дәлелдеудің маңызды әдісі. Егер диофанттық теңдеудің шешімі параметрге байланысты берілсе немесе бір шешімнен келесі шешімді құрастыру мүмкін болса, онда бұл әдіс өте тиімді болады.

Индукция әдісі екі негізгі кезеңнен тұрады:

1) База. Тұжырымның ең кіші мән үшін орындалатыны дәлелденеді.

2) Индукциялық қадам. $n = k$үшін дұрыс деп алып, $n = k + 1$үшін де дұрыс екені көрсетіледі.

Диофанттық теңдеулерде бұл әдіс көбіне «егер бір шешім бар болса, одан жаңа шешім құруға болады» деген идеяға негізделеді.

1.7 Оқытуда қолдану ерекшеліктері

Диофанттық теңдеулерді мектеп курсында енгізу толық жеке тарау ретінде емес, әртүрлі тақырыптармен байланыстыра отырып жүргізілуі мүмкін. Мысалы:

- сызықтық теңдеулерді өткенде $ax + by = c$түрін;
- бөлінгіштік белгілерін өткенде ЕҮОБ шартын;
- рационал өрнектерді өткенде $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$түрін;
- олимпиадалық дайындықта модуль әдісін;
- дәлелдеулер тақырыбында индукция әдісін қолдануға болады.

Теориялық материалды оқыту барысында әр әдістен кейін сол әдіске сәйкес есептер жүйесін беру тиімді. Бұл оқушының тек формуланы жаттап қоймай, қолдану аясын түсінуіне көмектеседі.

2. Диофанттық теңдеулерді шешуге арналған есептер

2.1 Жіктеу әдісіне есеп

Не табу керек: барлық оң бүтін шешімдерді табу

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$$

Шешуі:

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{6}$$
$$6x + 6y = xy$$
$$xy - 6x - 6y = 0$$
$$xy - 6x - 6y + 36 = 36$$
$$(x-6)(y-6) = 36$$

36 бөлгіштері:

$$1,2,3,4,6,9,12,18,36$$
$$x = 6 + d, y = 6 + \frac{36}{d}$$

2.2 Модуль әдісіне есеп

Не табу керек: бүтін шешім бар-жоғын анықтау

$x^2 + y^2 = 11$

Шешуі:

$x^2, y^2 \equiv 0$ немесе $1(\mathrm{mod}4)$

$x^2 + y^2 \equiv 0,1,2(\mathrm{mod}4)$

Ал:

$11 \equiv 3(\mathrm{mod}4)$

Қайшылық⇒**шешімі жоқ**

2.3 Евклид әдісіне есеп

Не табу керек: барлық бүтін шешімдерді табу

$14x + 21y = 7$

Шешуі:

$$\mathrm{gcd}\,(14,21) = 7$$
$$7 \mid 7$$
$$2x + 3y = 1$$
$$4 + 3y = 1$$
$$y = -1$$

Жалпы шешім: $x = 2 + 3t, y = -1 - 2t$

2.4 Индукция әдісіне есеп

Не табу керек: барлық $n \geq 1$үшін шешім бар екенін дәлелдеу

$x^2 + y^2 = 2^n$

Шешуі:

1-қадам:

$n = 1: 1^2 + 1^2 = 2$

2-қадам:

Егер:

$x_n^2 + y_n^2 = 2^n$

онда:

$$x_{n+1} = x_n + y_n, y_{n+1} = \mid x_n - y_n \mid$$

Тексереміз:

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = 2(x_n^2 + y_n^2) = 2^{n+1}$$

дәлелденді.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Bash Makova I.G. *Diophantine Equations*. – Mathematical Expositions, 1972.
2. Heath T.L. *Diophantus of Alexandria: A Study in the History of GreekAlgebra*. – 3. Cambridge University Press, 1910.
4. Andrew Wiles. *Number Theory and Fermat's Last Theorem (related works)*.
5. 18th International Mathematical Olympiad. Problem Collection.
6. USA Mathematical Olympiad. Selected Problems (5th, 8th, 16th, 29th).
7. IMO Shortlist. Selected Problems (20th, 21st, 40th, 42nd).
8. American Mathematical Monthly. Selected Articles on Number Theory.

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ОБУЧЕНИИ

Өміртай Жасұлан Үсенұлы

Научный руководитель: Байсалов Е.Р.

В данной статье рассматриваются вопросы систематизации методов решения диофантовых уравнений и их применения в процессе обучения школьной математике. Описаны основные виды диофантовых уравнений и проанализированы эффективные способы их решения, в частности метод разложения на простые множители, модульная арифметика, алгоритм Евклида и метод математической индукции. В работе представлены теоретические основы каждого метода и предложена система задач для их практического применения. Кроме того, показаны возможности развития логического мышления учащихся посредством решения однотипных задач с использованием одного метода. Результаты исследования доказывают, что элементы диофантовых уравнений могут эффективно применяться в школьном курсе и играют важную роль в повышении математической подготовки учащихся.

Ключевые слова: диофантовы уравнения, теория чисел, методика обучения, модульная арифметика, алгоритм Евклида, математическая индукция.

SYSTEMATIZATION OF METHODS FOR SOLVING DIOPHANTINE EQUATIONS AND THEIR APPLICATION IN TEACHING

Omirtai Zhasulan Usenuly

Scientific Supervisor: Baisalov E.R.

This article examines the systematization of methods for solving Diophantine equations and their application in the process of teaching school mathematics. The main types of Diophantine equations are described, and effective methods for solving them are analyzed, including prime factorization, modular arithmetic, the Euclidean algorithm, and mathematical induction. The paper presents the theoretical foundations of each method and proposes a system of problems for their practical application. In addition, the opportunities for developing students' logical thinking through solving similar types of problems using a single method are demonstrated. The research results prove that elements of Diophantine equations can be effectively applied in the school curriculum and play an important role in improving students' mathematical preparation.

Keywords: Diophantine equations, number theory, teaching methodology, modular arithmetic, Euclidean algorithm, mathematical induction.