

ӘОЖ 372.851

АРИФМЕТИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ПРОГРЕССИЯЛАР АРАСЫНДАҒЫ БАЙЛАНЫС: ТЕОРИЯ ЖӘНЕ ҚОЛДАНБАЛЫ ЕСЕПТЕР

Хамит Диляра Бақытқызы

1 курс магистранты, Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық
университеті, Алматы қ., Қазақстан

Ғылыми жетекші: Шуақаев Марат Капашұлы, т.ғ.д., профессор

Мақалада 9-сынып алгебра курсындағы арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың өзара байланысын оқыту әдістемесі қарастырылады. Екі прогрессияның құрылымдық ұқсастықтары мен айырмашылықтары талданып, оларды функционалдық тұрғыдан байланыстыру жолдары ұсынылады. Мақаланың негізгі идеясы — арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың формулаларын салыстыру арқылы «көпірді» қалыптастыру және аралас типтегі есептерді шешу алгоритмдерін дамыту. Сонымен қатар, прогрессиялардың байланысын көрсететін практикалық есептер ұсынылған. Зерттеу нәтижелері оқушылардың жүйелі ойлау қабілетін арттыруға және математикалық білімді біртұтас жүйе ретінде түсінуге бағытталған.

Кілт сөздер: арифметикалық прогрессия, геометриялық прогрессия, пәнішілік байланыс, функционалдық математикалық сауаттылық, қолданбалы есептер, оқыту әдістемесі

Қазіргі заманғы математикалық білім берудің басты міндеттерінің бірі — оқушыларға жекелеген тақырыптарды ғана емес, математикалық білімді біртұтас жүйе ретінде меңгерту. Бұл мәселе А.Е.Әбілқасымованың әдістемелік еңбектерінде математиканы оқытудың жүйелілік принципі ретінде негізделген [1]. Сондықтан 9-сынып алгебра курсындағы «Тізбектер» тарауы, соның ішінде арифметикалық және геометриялық прогрессиялар — оқушылардың логикалық ойлауын, функционалдық математикалық сауаттылығын және заңдылықтарды тану дағдысын қалыптастыратын маңызды тақырыптардың бірі болып табылады. Бұл тарау тек теориялық білімді емес, сонымен қатар практикалық есептерді шешу қабілетін дамытуға мүмкіндік береді, сондықтан оқушылардың математикалық мәдениетін қалыптастыруда ерекше орын алады.

Мектеп бағдарламасында прогрессиялар тақырыбы көбінесе бір-бірінен оқшау, жеке блоктар ретінде қарастырылады. Оқушылар алдымен арифметикалық прогрессияның формулаларын меңгеріп, оған есептер

шығарады, содан кейін геометриялық прогрессияға көшеді. Алайда тәжірибе көрсеткендей, көптеген оқушылар осы екі тізбектің арасындағы терең құрылымдық және функционалдық ұқсастықтарды байқамайды. Бұл олардың білімінің үстірт болуына және күрделі аралас есептерді шешу кезінде қиындықтарға тап болуына әкеп соғады.

Прогрессиялардың арасындағы байланыс оқушыларға математикалық ойлауды жүйелеуге, салыстыру мен талдауды дамытуға, сондай-ақ есептің шешімін бірнеше жолмен қарастыру қабілетін қалыптастыруға мүмкіндік береді. Арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың формулаларындағы ұқсастықтар мен айырмашылықтарды талдау оқушыға математикалық заңдылықтарды терең түсінуге, формулаларды дұрыс қолдануға және есеп шығаруда логикалық қадамдарды жоспарлауға көмектеседі.

Мақаланың өзектілігі — арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың арасындағы пәнішілік байланысты орнату арқылы оқушылардың білім сапасын арттыру қажеттілігінде. Арифметикалық прогрессиядағы қосу және азайту амалдарының геометриялық прогрессиядағы көбейту және бөлу амалдарына «трансформациялануын» түсіну оқушының математикалық интуициясын дамытады. Сонымен қатар, бұл байланыс 10–11 сыныптарда өтілетін көрсеткіштік және логарифмдік функцияларды меңгеруге берік іргетас қалайды.

Мақаланың мақсаты — 9-сынып оқушыларына арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың өзара байланысын түсіндірудің әдістемелік жолдарын ұсыну, олардың формулаларындағы симметрияны көрсету, аралас типтегі қолданбалы есептерді шығару дағдыларын қалыптастыру және оқушылардың математикалық ойлау қабілетін жүйелі дамыту.

Арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың құрылымдық-функционалдық ұқсастықтары мен айырмашылықтары

9-сынып алгебра курсына «Тізбектер» тарауын оқыту барысында арифметикалық және геометриялық прогрессияларды жеке-жеке қарастыру оқушылардың білімінде фрагменттілік тудыруы мүмкін. Яғни олар екі прогрессияның арасындағы құрылымдық ұқсастықты, логикалық байланысын көре алмайды. Сондықтан осы екі ұғымның арасындағы ішкі логикалық байланысты «аналогия әдісі» арқылы түсіндіруді ұсынамын. Бұл әдіс оқушыларға формулаларды механикалық жаттаудан арылып, олардың құрылымдық ұқсастығын түсінуге мүмкіндік береді [2].

Формулалардың аналогиясы мен амалдардың трансформациясы:

Арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың негізгі айырмашылығы олардың құрылу принципінде жатыр: біреуі қосу амалына негізделсе, екіншісі көбейту амалын қолданады. Дегенмен, егер осы амалдарды бір саты жоғары деңгейге көтерсек (қосуды көбейтуге, ал көбейтуді дәрежелегуге), екі прогрессияның формулалары бір-біріне «айна» сияқты ұқсас болады.

Оқушыларға бұл заңдылықты келесі салыстырмалы кесте арқылы көрсету әдістемелік тұрғыдан тиімді [3,4]:

1-кесте. Арифметикалық және геометриялық прогрессиялардың негізгі формулалары мен қасиеттерінің салыстырмалы сипаттамасы

Сипаттамасы	Арифметикалық прогрессия (a_n)	Геометриялық прогрессия (b_n)	Байланыс принципі
Анықтамасы	Әрбір келесі мүше алдындағы мүшеге тұрақты сан қосу арқылы алынады $a_{n+1} = a_n + d$	Әрбір келесі мүше алдындағы мүшеге тұрақты санға көбейту арқылы алынады $b_{n+1} = b_n \cdot q$	$+\rightarrow\cdot$
n –ші мүшенің формуласы	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$	$+\rightarrow\cdot$; $\cdot\rightarrow \wedge$ (дәреже)
Тұрақты параметр	Айырма d	Еселік q	Амалдың өзгеруі
Орта мүше қасиеті	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$	Арифм. орта \rightarrow Геом. орта
Қасиеттер арасындағы қатынас	$a_n - a_k = (n - k)d$	$\frac{b_n}{b_k} = q^{n-k}$	$-\rightarrow /$

Кестеден көріп отырғанымыздай, арифметикалық прогрессияның қасиеттерін геометриялық прогрессияға көшіру үшін математикалық амалдарды бір сатыға көтеру жеткілікті. Мұндай тәсіл оқушылардың математикалық заңдылықтарды түсінуін тереңдетіп, есте сақтау процесін жеңілдетеді.

Прогрессиялардың тағы бір маңызды байланысы — олардың орта мүшелерінің қасиеті. Арифметикалық прогрессияда әрбір орташа мүше (екіншісінен бастап) көршілес мүшелерінің арифметикалық ортасына тең болса, геометриялық прогрессияда бұл қасиет геометриялық орта арқылы көрініс табады. Мұндай ұқсастық оқушыларға екі тізбектің де «симметриялы» екенін түсінуге мүмкіндік береді.

Сонымен қатар, прогрессияларды функция ретінде қарастыру олардың өсу динамикасын анық көрсетуге көмектеседі:

1. Арифметикалық прогрессия — сызықтық функция, графигі түзу сызық бойында орналасады, біркелкі өсімді көрсетеді.

2. Геометриялық прогрессия — дискретті көрсеткіштік функция, графигі экспоненталық өсіп, қарқынды өсімді сипаттайды[5].

Мысал 1.

Әлия әр жыл сайын 2000 теңге жинайды. Бірінші жылы 2000 теңге салды, екінші жылы тағы 2000 теңге, үшінші жылы тағы 2000 теңге. 5 жылдан кейін қанша ақша жинайды?

Берілгені:

Бірінші мүшесі: $a_1 = 2000$

Айырмасы: $d = 2000$

$n = 5$.

Шешуі:

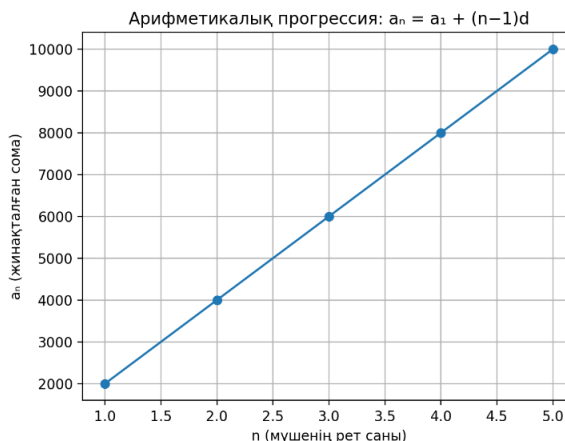
Арифметикалық прогрессия формуласын қолданамыз:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_5 = 2000 + (5 - 1) \cdot 2000 = 10000.$$

Барлық мүшелер тізімі: 2000, 4000, 6000, 8000, 10000.

Графиктік көрсету:



1-сурет. Арифметикалық прогрессияның графигі

Мысал 2. Бастапқыда бактериялар саны 100-ге тең. Әр сағат сайын олардың саны екі есе артады. 6 сағаттан кейін бактериялар саны қанша болады?

Берілгені:

Бактерияның бастапқы мәні: $b_1 = 100$

Еселігі: $q=2$

$n = 7$.

Шешуі:

Геометриялық прогрессия формуласын қолданамыз:

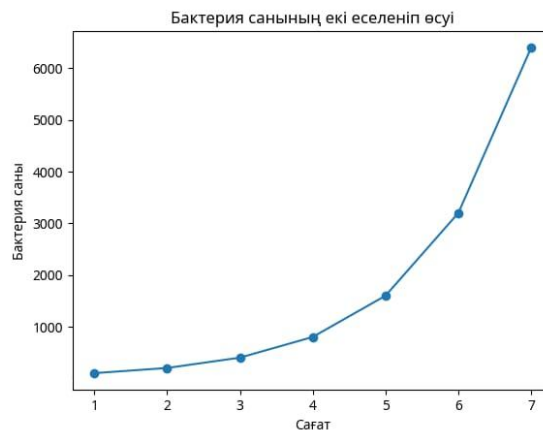
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Мұндағы $b_1 = 100, q = 2, n = 7$ (бастапқы сәтті 1-мүше деп алсақ).

$$b_7 = 100 \cdot 2^{7-1} = 100 \cdot 64 = 6400.$$

Барлық мүшелер тізімі: 100, 200, 400, 800, 1600, 3200, 6400.

Графиктік көрсету:



2-сурет. Геометриялық прогрессияның графигі

Жүргізілген есептер мен графиктік модельдеу нәтижелері функционалдық тәсілдің тиімділігін көрсетеді. Бұл тәсіл оқушыларға прогрессияларды тек формулалар жиынтығы ретінде емес, нақты процестердің математикалық моделі ретінде қабылдауға мүмкіндік береді. Мұндай теориялық негіздеме арифметикалық және геометриялық прогрессиялар арасындағы «логикалық көпірді» нығайтып, аралас типтегі есептерді шешуге дайындайды.

Сондықтан сабақ барысында тек жеке арифметикалық немесе геометриялық есептермен шектелмей, екі прогрессияны қатар қолданатын қолданбалы есептер жүйесін ұсыну орынды. Мысалы, жыл сайын өсетін тұрақты табыс пен пайыздық өсімді бір мезгілде есептеу, инвестициялық модельдер немесе халық санының өзгеру динамикасын сипаттайтын есептер оқушылардың логикалық ойлау қабілетін, есеп шығару алгоритмін қолдану дағдыларын және математикалық заңдылықтарды терең түсінуін арттырады. Аталған теориялық тұжырымдарды бекіту үшін төменде оқушылардың практикалық дағдыларын дамытуға бағытталған қолданбалы және аралас типтегі есептер жүйесі қарастырылады.

Мысал 3. Үш бақылау жұмысынан алынған баллдар арифметикалық прогрессияны құрайды және олардың қосындысы 21-ге тең. Егер бірінші баллға 2 ұпай, екінші баллға 3 ұпай, үшінші баллға 9 ұпай қосқанда жаңа баллдар геометриялық прогрессияны құрайды. Оқушының бастапқы алған баллдарын табыңыз.

Шешуі:

1. Үш бақылау жұмысынан алынған баллдарды a , $a + d$, $a + 2d$ деп белгілейік, себебі олар **арифметикалық прогрессия** құрайды. Олардың қосындысы берілген:

$$\begin{aligned} a + (a + d) + (a + 2d) &= 21 \\ 3a + 3d &= 21 \\ 3(a + d) &= 21 \\ a + d &= 7. \end{aligned}$$

2. Егер бірінші баллға 2 ұпай, екіншіге 3, үшіншіге 9 қоссақ, жаңа сандар геометриялық прогрессия құрайды.

Жаңа сандар:

$$b_1 = a + 2, b_2 = a + d + 3, b_3 = a + 2d + 9.$$

Геометриялық прогрессия үшін ортадағы элемент **квадрат түбірі** арқылы анықталады:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

$$(a + d + 3)^2 = (a + 2) \cdot (a + 2d + 9).$$

$$3. a + d = 7 \Rightarrow d = 7 - a.$$

Орнына қойсақ:

$$(a + (7 - a) + 3)^2 = (a + 2) \cdot (a + 2(7 - a) + 9)$$

$$(a + 7 - a + 3)^2 = (a + 2)(a + 14 - 2a + 9)$$

$$100 = (a + 2)(23 - a)$$

4. Квадрат теңдеуді шығару:

$$(a + 2)(23 - a) = 100$$

$$23a + 46 - a^2 - 2a = 100$$

$$a^2 - 21a + 54 = 0$$

$$D = 21^2 - 4 \cdot 54 = 225$$

$$a = \frac{21 \pm 15}{2} \Rightarrow a_1 = 18, \quad a_2 = 3$$

5. d –ны табу:

$$d = 7 - a.$$

Егер $a = 18$ болса, $d = 7 - 18 = -11 \rightarrow$ балл теріс емес болады.

Егер $a = 3$ болса, $d = 7 - 3 = 4 \rightarrow$ дұрыс.

6. Бастапқы баллдар:

$$a = 3, a + d = 7, a + 2d = 11.$$

Жаңа баллдар:

$$3 + 2 = 5, \quad 7 + 3 = 10, \quad 11 + 9 = 20.$$

Тексеру: $10^2 = 5 \cdot 20 = 100$.

Жауабы: 3, 7, 11.

Мысал 4. Жас кәсіпкер шағын кофехана ашты. Ол алғашқы күннен бастап күн сайын табысын бірдей мөлшерге арттырып отырды (яғни табыс арифметикалық прогрессия құрайды). 7-күні кофехананың күндік табысы 14 мың теңгеге жетті. Белгілі болғандай, 1-күнгі, 2-күнгі және 4-күнгі табыстары геометриялық прогрессия құрайды. Кәсіпкердің табысы күн сайын қанша мың теңгеге өсіп отырған?

Шешуі:

Арифметикалық прогрессия үшін: $a_7 = a_1 + 6d = 14$.

1, 2, 4 – күндердегі табыстар:

$$b_1 = a_1, b_2 = a_1 + d, b_3 = a_1 + 3d.$$

Геометриялық прогрессия шарты:

$$b_2^2 = b_1 \cdot b_3$$

$$(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d).$$

Мұнда $a_1 = 14 - 6d$.

Шешу нәтижесінде $d = 2$.

Жауабы: Кофехананың табысы күн сайын 2 мың теңгеге өсіп отырған.

Жоғарыда қарастырылған аралас типтегі есептер мен қолданбалы тапсырмалар оқушылардың білім деңгейін теориялық тұрғыдан ғана емес, практикалық дағдылар тұрғысынан да қалыптастыруға бағытталған. Алайда,

ұсынылған интеграциялық әдістеменің нақты нәтижесін анықтау үшін арнайы педагогикалық бақылау мен диагностикалық жұмыс жүргізілді. Сондықтан біз «прогрессиялардың байланысын түсіну оқушының жалпы математикалық логикасына қалай әсер етеді?» деген сұраққа жауап іздедік. Зерттеу жұмысы **Д. Пойаның аналогия әдісіне** негізделген. [2]

Зерттеу барысында оқушылар екі топқа бөлінді: бақылау тобы 8 оқушы (дәстүрлі әдіспен оқыған) және эксперименталды топ 8 оқушы (прогрессиялардың байланысын ескеретін әдістемемен оқыған). Диагностика келесі үш бағыт бойынша жүргізілді:

1. Теориялық деңгей: Формулалардың құрылымдық ұқсастығын тану.
2. Алгоритмдік деңгей: Бір прогрессияның қасиетін екіншісіне трансформациялау дағдысы.
3. Шығармашылық деңгей: Аралас типтегі және қолданбалы есептерді жүйелі талдау арқылы шешу.

Зерттеу нәтижелері

2-кесте. Зерттеу нәтижесі

Бағалау көрсеткіштері	Бақылау тобы (%)	Эксперименталды топ (%)	Тиімділік көрсеткіші (Өсім)
Прогрессиялардың сипаттамалық қасиеттерін тану	50%	87,5%	37,5%
Формулаларды аналогия бойынша түрлендіру	37,5%	62,5%	25%
Аралас есептерді шешу алгоритмін меңгеру	37,5%	75%	37,5%
Пәнішілік байланысты (функция) түсіну	50%	87,5%	37,5%

Жүргізілген диагностика нәтижелері көрсеткендей, ұсынылған интеграциялық оқыту әдістемесінің оқушылардың логикалық құрылымдарды тану және оларды практикада қолдану дағдысын едәуір дамытатынын айғақтайды. Формулаларды аналогия бойынша түрлендіру деңгейінің 62,5% —ға жетуі — оқушылардың жаттаудан гөрі логикалық пайымдауға көшкенін білдіреді.

Қорытынды

Қорыта айтқанда, ұсынылған әдістемелік тәсілдер тек «Тізбектер» тарауын терең меңгеріп қана қоймай, оқушылардың функционалдық математикалық

сауаттылығын қалыптастыруға және олардың математикалық заңдылықтарды әлемнің біртұтас моделі ретінде қабылдауына тікелей ықпал етеді. Педагогикалық эксперимент нәтижелері осындай әдістеменің аралас есептерді шешу алгоритмін меңгеру және пәнішілік байланыстарды бағалау көрсеткіштерін бақылау тобымен салыстырғанда елеулі деңгейде арттырғанын көрсетті. Арифметикалық және геометриялық прогрессияларды байланыстыра оқыту және оларды қаржылық немесе биологиялық модельдер сияқты қолданбалы контексте пайдалану функционалдық математикалық сауаттылықты кеңейтеді. Сонымен қатар, бұл тәсіл жоғары сыныптағы көрсеткіштік және логарифмдік функцияларды терең меңгеруге сапалы пропедевтикалық дайындық негізін құрайды.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

- 1.Әбілқасымова А. Е. Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі: дидактикалық-әдістемелік негіздері. Оқу құралы. – Алматы: Мектеп, 2014. – 254 б.
- 2.Пойя Д. *Как решать задачу* (How to Solve It). — М.: Просвещение, 1959.
- 3.Шыныбеков А.Н., Шыныбеков Д.Ә., Жұмабаев Р.Н. *Алгебра*: Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық. – Алматы: Атамұра, 2019. – 240 б.
- 4.Әбілқасымова А.Е., Кучер Т.П., Корчевский В.Е., Жумағұлова З.Ә. *Алгебра*: Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық. – Алматы: Мектеп, 2019. – 176 б.
- 5.SEQUENCES, THEIR APPLICATION AND USE IN THE FIELD OF MATHEMATICS Gabe Stevens 5c1 STEVENS GABE – 5CL1 – 2019/2020

СВЯЗЬ МЕЖДУ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИЯМИ: ТЕОРИЯ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Хамит Диляра Бакыткызы

В статье рассматривается методика преподавания взаимосвязи арифметической и геометрической прогрессий в курсе алгебры 9 класса. Анализируются структурные сходства и различия двух прогрессий, предлагаются пути их функциональной связи. Основная идея статьи заключается в создании «моста» между арифметической и геометрической прогрессиями через сравнение формул и разработку алгоритмов решения смешанных типов задач. Кроме того, представлены практические задачи, показывающие взаимосвязь прогрессий. Результаты исследования направлены на развитие системного мышления учащихся и понимание математических знаний как единой целостной системы.

Ключевые слова: арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, межпредметная связь, функциональная математическая грамотность, прикладные задачи, методика преподавания

THE RELATIONSHIP BETWEEN ARITHMETIC AND GEOMETRIC PROGRESSIONS: THEORY AND APPLIED PROBLEMS

Khamit Dilyara Bakytkyzy

The article examines the methodology for teaching the interrelation between arithmetic and geometric progressions in the 9th grade algebra course. The structural similarities and differences between the two progressions are analyzed, and ways to connect them functionally are proposed. The main idea of the article is to build a "bridge" between arithmetic and geometric progressions by comparing formulas and developing algorithms for solving mixed-type problems. In addition, practical problems showing the connection between progressions are presented. The results of the study are aimed at developing students' systematic thinking and understanding mathematical knowledge as an integrated whole.

Keywords: arithmetic progression, geometric progression, interdisciplinary connection, functional mathematical literacy, applied problems, teaching methodology.

REFERENCES

1. Abilkassymova, A.E. Theory and Methodology of Teaching Mathematics: Didactic and Methodological Foundations. Textbook. Almaty: Mektep, 2014. 254 p.
2. Pólya, G. How to Solve It. Moscow: Prosveshchenie, 1959.
3. Shynybekov, A.N., Shynybekov, D.A., & Zhumabayev, R.N. Algebra: Textbook for Grade 9 of General Secondary Schools. Almaty: Atamura, 2019. 240 p.
4. Abilkassymova, A.E., Kucher, T.P., Korchevsky, V.E., & Zhumagulova, Z.A. Algebra: Textbook for Grade 9 of General Secondary Schools. Almaty: Mektep, 2019. 176 p.
5. Stevens, G. Sequences, Their Application and Use in the Field of Mathematics. 5C1, 2019/2020.