ӘОЖ 514.7

ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ДӘЛЕЛДЕУДІҢ ТИІМДІ ӘДІСТЕРІ

Түлкібай Мақпал Айтуғанқызы

магистрант, Қорқыт Ата атындағы Қызылорда университеті,
Қызылорда, Қазақстан

Ғылыми жетекші: Меңліқожаева Сәулеш Қойлыбайқызы
Қорқыт Ата атындағы Қызылорда университетінің қауымдастырылған профессоры, п.ғ.к.

Алгебрадан дәлелдеу есептері геометриядағы сияқты логикалық ойлауды дамытуға, теориялық материалды терең меңгеруге және практикалық берік дағды қалыптастыруға көмектеседі. Алайда, орта мектепте алгебраны оқыту тәжірибесінде теңсіздіктерді дәлелдеуге аса көңіл бөлінбейді. Мұның бір себебі алгебра оқулықтарында дәлелдеуге берілетін есептер саны аз екендігі болып табылады. Осы мәселе бойынша қолданыстағы мектеп оқулықтарына талдау жасалып теңсіздіктермен дәлелдеулер жүргізудің тиімді жолдары мақалада ұсынылып отыр.

Кілт сөздер: Алгебралық және геометриялық теңсіздіктер, Коши-Буняковский әдісі, арифметикалық және геометриялық орталар.

Кіріспе. Алгебра курсында маңызды мәселелердің бірі – теңсіздіктер деп есептейміз. Математика оқулықтарында «артық», «кем» таңбалармен байланысты өрнектер жиі кездеседі. Оқу бағдарламасында сан теңсіздіктерінің қасиеттерінен бастап курделі теңсіздіктерді шешу теориясы мен практикалық мәселелеріне орын берілген. Алайда, соңғы жылдары жарық көрген оқулықтарда теңсіздіктерді дәлелдеуге назар аударылмай келеді. Сондықтан да математикалық теңсіздіктерді делелдеу әдістерін толық меңгере алмай келеміз.

Зерттеу әдіснамасы.Математиканы оқыту процесінде ойлаудың логикалық сапасын қалыптастыратын мүмкіндік мол. Атап айтқанда, ой толғап ойын қортындылай білу және болып жатқан өзгерістерге баға беру, өз ойлары мен пікірлерін дәлелдеу т.б.

Сондықтан математикалық білім беруде әруақытта басты мәселе болып қала беретін дәлелдеуге қатысты зерттеулер қатарында М.В. Мительский[1] Г.И.Саранцев[2] т.б. еңбектерді атауға болады. Алайда, дәлелдеуге қатысты нұсқаулар мен еңбектердің біршама барлығына қарамастан сәйкесті дағдыларды меңгеру төменгі деңгейде қалып отыр.

Мұның бір себебі алгебра оқулықтарында дәлелдеуге берілетін есептер саны аз екендігін айтуымызға болады.Осыған сай дәлелдеуге берілген арнайы есептер мен тапсырмаларды жинақтап шығарудың тиімді жолдарын жан-жақты қарастыру мақсаты қойылды. Қолданыстағы оқулықтар мен қатар математикалық олимпиада есептерінің жинақтары бойынша талдау жасалды[3-4]. Бұл еңбектерде соңғы он жыл ішінде ресей мектеп оқушыларына ұсынылған есептер келтірілген. Зерделеп қарасақ әр түрлі деңгейдегі конкурстар мен олимпиадаларда дәлелдеуге берілген тапсырмаларды кездестіреміз. Оның біреуі көбінесе осы теңсіздіктер немесе тепе-теңдіктерді дәлелдеуге байланысты. Тіпті кейбір теңдеулеріміздің өзін теңсіздіктер көмегімен шешуге тура келеді. Біз теңсіздіктерді дәлелдеудің өзімізге таныс (анықтама бойынша, қарсы-жору, синтетикалық әдіс, және тірек теңсіздіктері ретінде Коши-Буняковский және Коши теңсіздіктерін қолданатын) әдістермен қатар геометриялық әдісті қолданудың тиімділігін көрсетеміз. Ең бастысы классикалық әдістермен шешілмейтін теңсіздіктерді жаңа тәсілдермен шешу мүмкіндіктері бар екенін көрсету. Осы жаңа әдісті зерттеген Қазақстандық жас зерттеушілер Ибатулин Ибрагим және Лепес Адилсултан екендігін мақтанышпен айта аламыз. Тиімді әдіс – жанамаларды ажырату әдісі (метод отделяющих касательных) деп аталып ең алғаш XXI – халықаралық конференцияда ұсынылған(“Математика. Образование ”. г.Чебоксары 2013г) Бұл әдісте теңсіздікке кіретін функция зерттеледі[5].

Зерттеу нәтижелері.Теңіздіктерді дәлелдеу әдістері алуан түрлі. Осы жұмыста теңсіздіктердің кейбір турлері үшін қоданылған тиімді әдістер ұсынылады.

1.Алгебралық теңсіздіктерді дәлелдеуде геометрия әдістерін қолдану

№ 1. Дәлелдеу керек :

$\sqrt{a^2-ab+b^2} + \sqrt{b^2-bc+c^2} \geq \sqrt{a^2+ac+c^2}$

Шешуі:

Бір нүктеден үш сәуле өткіземіз а,в ,с және а сәулесінен А нүктесін, b сәулесінен В нүктесін, с сәулесінен С нүктесін алып, үш нүктені қосамыз.

<AOB=<BOC=60^o

AO = a, OB = b, OC = c

Косинустар теоремасын пайдаланып, AB,BC,AC:

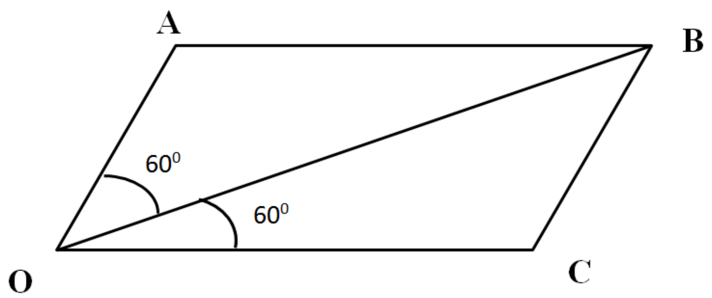
AB= $\sqrt{a^2-2abcos60^o+b^2}$= $\sqrt{a^2-ab+b^2}$,

BC=$\sqrt{b^2-2bccos60^o+c^2}$= $\sqrt{b^2-bc+c^2}$,

AC= = .

Бұдан үшбұрыштың екі қабырғаларының қосындысы үшінші қабырғасынан кем емес деген үшбұрыштар теоремасына сәйкес

$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geq\sqrt{a^2+ac+c^2}$



1-сурет

2. Геометриялық теңсіздіктерді дәлелдеудің тиімді жолдары

№ 1. Периметрі екіге тең болатын қабырғасы a, b, c үшбұрышы берілген.

Дәлелдеу керек: $a^2+b^2+c^2<2$ (1 - abc).

Дәлелдеуі:

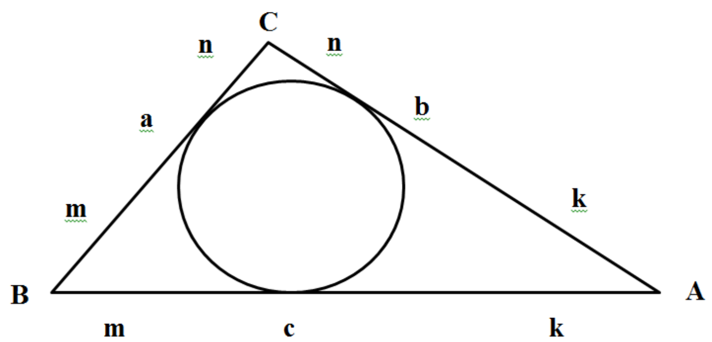
Егер a, b, және c - үшбұрыш қабырғалары болса, ондаа <b + c = 2- b; b< a+ c = 2- b; c< a + b=2; 2 a<2; a<1, және b<1, c <1, дәлелдеу керек $a^2+b^2+c^2-2+2$ abc<0.

Сондықтан f (x)=$x^2+b^2+c^2+2$ bcx – 2,x∈(0;1) функциясын қарастырамыз. f'(x) = 2x+2bc>0 x ∈(0;1) үшін f'(x) функциясы x ∈(0;1) аралығында өседі ⇒f (1) = - 2 + 2bc + 1+b^2+c^2 = -1 + $(b+c)^2$ = 0 аралықтың ұштарында ең үлкен мән қабылдайды, өйткені b + c=2-a, a=1⇒ b + c =2-1 =1

Яғни кез-келген a<1 үшін функция мәні f (a) <0, $a^2+b^2+c^2-2+2ab<0$.

№ 2.a, b, c – ABC үшбұрышының қабырғалары болсын. Онда a^2c (a-b)+b^2c (b-c)+c^2a (c-a)≥0 теңсіздігін дәлелде.

Дәлелдеуі:



2 – сурет

ABC үшбұрышына іштей шеңбер саламыз. Шеңбермен жанасу нүктесінде үшбұрыштың қабырғалары екіге бөлінед және бір нүктеден шыққан екі жанаманың жанасу нүктесіне дейінгі қашықтықтары тең болады. Сондықтан a= m+n,b = m+n, c= m+k n,m,k >0

Осы белгілеуді теңсіздікке апарып қойсақ:

$(m+n)^2$(n+k)(m-k)+$(n+k)^2$(m+k)(n-m)+$(m+k)^2$(m+n)(k-n)= km^3+mn^3+nk^3-nmk^2- nkm^2- kmn^2=km$(m-n)^2$+mn$(n-k)^2$+nk$(k-m)^2$ ≥0 ақиқат теңсіздік.

a^2b(a-b) + b^2c(b-c) +c^2a(c-a) = km$(m-n)^2$ + mn$(n-k)^2$+ nk$(k-m)^2$ ≥0ақиқат теңсіздік аламыз.

3.Коши-Буняковский әдісін қолдану

Коши –Буняковский теңсіздігіне тоқталайық:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\varphi$

$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \geq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

$\vec{a} = (a_1 a_2 a_3)$

$\vec{b} = (b_1 b_2 b_3)$

$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \leq (a_1 b_1 + \ a_2 b_2 + a_3 b_3)$

Бұл теңсіздік арқылы көптеген теңсіздіктерді дәлелдеуге болады.

Мысалдар қарастырайық:

№ 1. Дәлелдеу керек $a^2 + b^2$+c^2 ≥14 , егер a+2b+3c≥14

Дәлелдеуі: $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ сандар үшін жалпы теңсіздік Коши-Буняковский теңсіздігі деп аталады. Бұл теңсіздік $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$ $(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$≥ $(a_1 b_1 + \ a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$

Бұдан $(a^2 + b^2$+$c^2)$$(1^2 + 2^2$+$3^2)$≥ $(\ a + 2b + 3c)^2 \geq 14^2$, бұдан $a^2 + b^2$+c^2 ≥14.

№ 2. Дәлелдеу керек $\sqrt{a}$(a+c-b)+$\sqrt{b}$(a+b-c)+$\sqrt{c}$(b+c-a) $\leq \sqrt{(a^2 + b^2+c^2)(a+b+c)}$, бұл жерде a, b, c – кез-келген үшбұрыштың қабырғалары.

Дәлелдеуі:$\sqrt{a}$(a+c-b)+$\sqrt{b}$(a+b-c)+$\sqrt{c}$(b+c-a) =$\sqrt{a(a+c-b)}\sqrt{(a+c-b)}$ + $\sqrt{b(a+b-c)}\sqrt{(a+b-c)}$+ $\sqrt{c(b+c-a)}\sqrt{(b+c-a)} \leq$ $\sqrt{a(a+c-b) + b(a+b-c) + c(b+c-a)} \cdot \sqrt{(a+c-b) + (a+b-c) + (b+c-a)}$ = $\sqrt{(a^2 + b^2+c^2)(a+b+c)}$.

4. Арифметикалық,геометриялық және гармониялық орталардың ара қатынасын қолдану әдісі

Теңсіздікті дәлелдеңізер:

$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \leq \frac{4}{9}$

мұндағы a, b, c, d - қосындысы 4-ке тең оң сандар

$$\text{I)}\ \frac{a}{a^3+8}+\frac{b}{b^3+8}+\frac{c}{c^3+8}+\frac{d}{d^3+8}=\frac{a}{a^3+1+1+6}+\frac{b}{b^3+1+1+6}+\frac{c}{c^3+1+1+6}+\frac{d}{d^3+6+1+1}\leq[\mathrm{AM}-\mathrm{GM}]\leq\frac{a}{3a+6}+\frac{b}{3d+6}+\frac{c}{3c+6}+\frac{d}{3d+6}=\frac{4-2\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}\right)}{3}\leq[\mathrm{AM}-\mathrm{HM}]\leq\frac{4-2\frac{16}{a+2+b+2+c+2+d+2}}{3}=\frac{4}{9}$$

Бұл жерде стандартты белгілеулер қолданылды:

$\mathrm{AM}-\mathrm{GH}$ – бірнеше сандардың арифметикалық ортасы мен геометриялық ортасы арасындағы теңсіздік.

$\mathrm{AM}-\mathrm{HM}$ – бірнеше сандардың арифметикалық ортасы мен гармониялық ортасы арасындағы теңсіздік.

Қорытынды

Осы мақала тақырыбын таңдап алып, ізденіс жұмыстарын жүргізуге түрткі болған негізгі мәселе алгебрадағы дәлелдеу соның ішінде теңсіздіктерді дәлелдеу болып табылады. Себебі тек қана мектеп математика курсында ғана емес, сонымен қатар көптеген олимпиадалық және практикалық есептерді шешуде де теңсіздіктер көп қолданылады. Олай болса дәлелдеуге берілген практикалық мазмұндағы есептерді жүйелеу және оларды шешуге арнайы бағдарламалар мен жаңа технологияларды қолдану біздің әрі қарайғы зерттеу жұмыстарымыз болады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. М.В.Мительский. Психолого-педагогические основы дидактики математики. М.,1997
2. Г.И.Саранцев. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе.М.,2006
3. Агаханов Н.Х. и др. Всероссийские олипиады школьников по математике 1993-2009: Заключительные этапы. – М.: МЦНМО,2010
4. Берлов С.Л., Петров Ф.В., Смирнов А.В. Петербургские математические олимпиады 2011 года- М.: МЦНМО,2012.
5. Ибатулин И.Ж., Лепес А.Н. Альтернативные доказательства 100 неравенств: метод отделяющих касательных.- Санкт-Петербург: Абсолют-Н, 2014.

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВ.

Тулькибай Макпал Айтугановна

Научный руководитель: Менлихожаева Саулеш Койлыбаевна

Задачи по алгебре, требующие доказательство, как и по геометрии, развивают логическое мышление, помогают глубже освоить теоретический материал, формировать практические навыки. Один из причин является малое количество задач на доказательств в учебниках по алгебре. Был проведён анализ школьных учебников по данной проблеме и предложены эффективные пути доказательств при работе с неравенствами

Ключевые слова: Алгебраические и геометрические неравенства, метод Коши-Буняковского, арифметическое и геометрическое среднее.

EFFECTIVE METHODS FOR PROVING INEQUALITIES

Tulkibai Makpal Aituganovna

Scientific supervisor: Menlikhozhaeva Saulesh Koilybaykyzy

Algebra proofs help to develop logical thinking, in-depth learning of theoretical material and practical skills.However, practice of teaching algebra proofs at the high school is not appropriately taken into consideration. A very small number of mathematical problems on proofs in algebra textbooks are one of the reasons. Analysis of current school textbooks on the research problem has been done. Mathematical problems on proofs have been given with their way of solving in the main part.

Keywords: Algebraic and geometric inequalities, Cauchy-Bunyakovsky Method,ratio of arithmetic and geometric media.

REFERENCES

1. M. V. Mitelskii. Psychological and pedagogical foundations of mathematical didactics. Moscow, 1997. [inRussian]
2. G. I. Sarantsev. Teaching mathematical proofs and refutations at school. Moscow, 2006. [in Russian]
3. Agakhanov N. Kh. et al. All-Russian school Olympiads in Mathematics 1993-2009: Final stages. - Moscow: MCNO, 2010. [in Russian]
4. Berlov S. L., Petrov F. V., Smirnov A. V. St. Petersburg Mathematical Olympiads of 2011 - Moscow: MCNO, 2012. [in Russian]
5. Ibatulin I. Zh., Lepes A. N. Alternative proofs of 100 inequalities: the method of separating tangents. - St. Petersburg: Absolut-N, 2014. [in Russian]